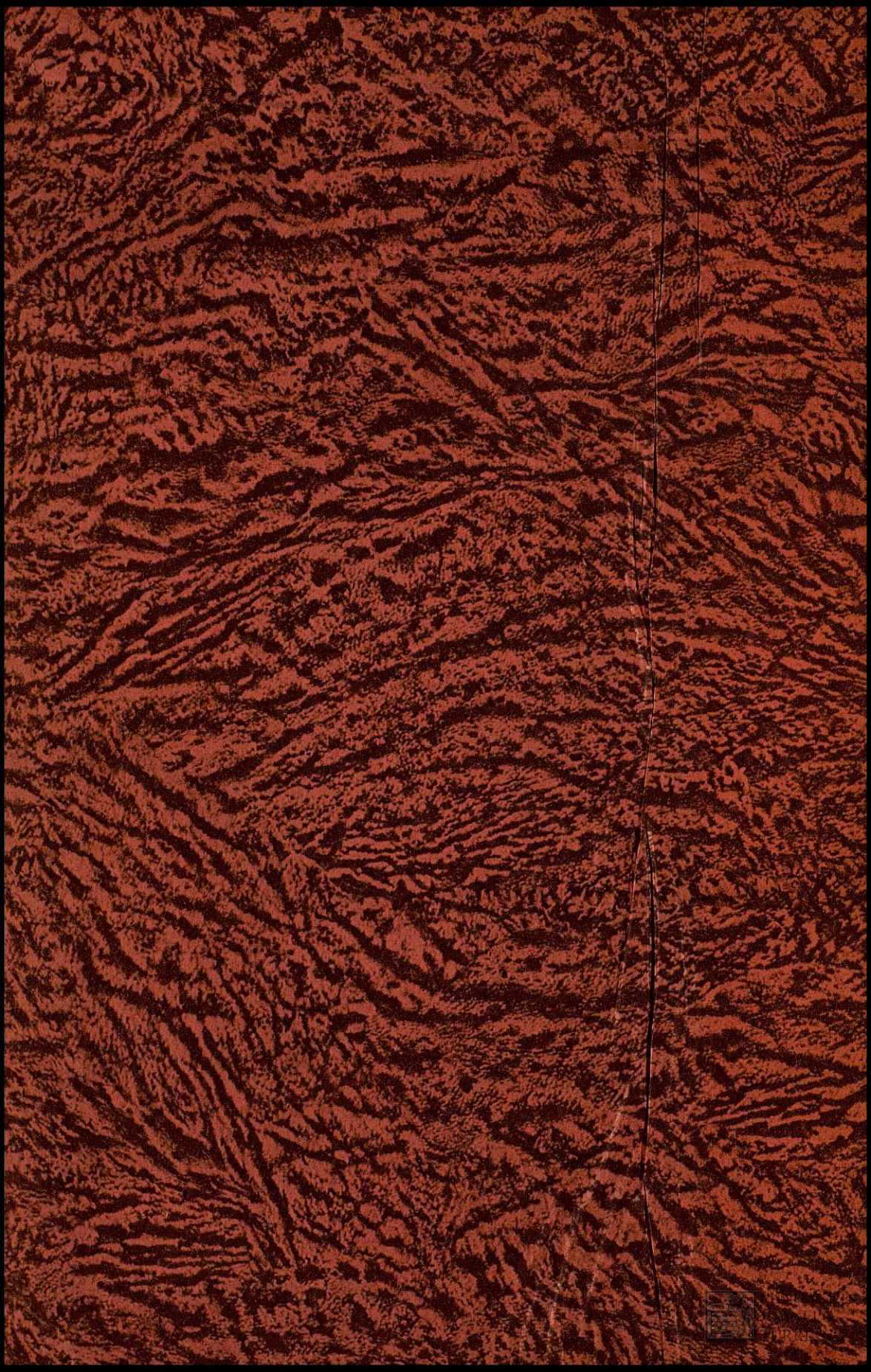




FUNDACIÓN
VANELE
BORRERO







FUNDACIÓN
JUANELO
TURRIANO

A mi querido amigo y
comp^o D. A. Prieto;

M. de Yafra

R 6244

46/74



12 6884
46/74

LOS MÉTODOS

DE

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

DERIVADOS DEL

TRABAJO ELÁSTICO

POR

JUAN MANUEL DE ZAFRA

Ingeniero del Cuerpo Nacional de Caminos, Canales y Puertos.
Profesor de "Hormigón armado," y de "Puertos,"
en la Escuela Especial de dicho Cuerpo.



FUNDACION JUANELO TURRIANO
BIBLIOTECA

MADRID

IMPRENTA DE PRUDENCIO PÉREZ DE VELASCO

Campomanes, número 4.

1912



FUNDACIÓN
JUANELO
TURRIANO

LIBRARY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

LIBRARY

LIBRARY

LIBRARY

LIBRARY

LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LIBRARY

A la memoria

de

Alberto Castigliano.



FUNDACIÓN
JUANELO
TURRIANO

Introducción.

La Mecánica aplicada, la ciencia á un tiempo racional y experimental, caballo de batalla del Ingeniero, aparece, para la mayoría de los que en España la practican, con un carácter absolutamente estático. La noción de trabajo en nada interviene en el cálculo de construcciones, tal como, analítica ó gráficamente, se suele realizar. Y mientras que los problemas estáticos se resuelven fácilmente, se tropieza con dificultad grave en cuanto aparecen acciones dinámicas cuyo efecto en la construcción precisa evaluar.

La orientación de la escuela francesa en el sentido estático y el ser francesas las obras en que la mayoría de los Ingenieros españoles ha estudiado Mecánica aplicada, son la causa de aquéllo.

El cálculo de la estabilidad de una construcción es un problema esencialmente dinámico: es el estudio del paso de un equilibrio inicial á otro equilibrio final, paso que implica fatalmente un movimiento. Se mueven las *causas exteriores*, cuya acción rompe el equilibrio primitivo; se mueve poquísimo, pero se mueve, la construcción, algo en su conjunto, mucho más en sus elementos unos respecto á otros: *trabajan*, á un tiempo, las causas exteriores y la construcción. La energía puesta en juego por aquéllas se almacena en ésta, una vez logrado el equilibrio y allí subsiste, en forma potencial, hasta que la desaparición de las causas provoca un proceso recíproco del primero y que realiza á expensas de esa energía.



El principio de D'Alembert permite reducir los problemas dinámicos á estáticos, mediante la introducción de las fuerzas de inercia. Si las velocidades de las causas exteriores y de la construcción decrecen indefinidamente, es decir, si el movimiento de unas y otra se hace indefinidamente lento, desaparecen aquellas fuerzas. Tal es el fundamento de la escuela estática: el problema se reduce al del equilibrio *final*, entre unas causas que *ya se han movido* y una construcción que *ya se ha deformado*.

Si las causas son de suyo dinámicas, un choque, por ejemplo, no hay posibilidad de prescindir de las fuerzas de inercia: el problema se resuelve por dicha escuela, siempre por reducción al caso estático, mediante el principio de D'Alembert.

La escuela cinética plantea el problema de un modo mucho más general, aplicando el principio de la conservación de la energía. Poco importa que las causas exteriores sean estáticas ó dinámicas: ponen en juego un trabajo, una energía, que al *desaparecer aparentemente*, alcanzado el equilibrio final, tiene que subsistir íntegra; la construcción la guarda en las deformaciones y movimientos y hasta, á veces, en la elevación de temperatura que ha experimentado. En lugar de igualdades de fuerzas ó equivalencia de éstas con las originadas por deformaciones, son igualdades de trabajos, desarrollados por las causas, absorbidos por la construcción, las que maneja la escuela cinética. Sus procedimientos se reducen á uno solo: bien sabido, y es muy sencillo, cualquier problema, estático ó dinámico, se plantea con suma facilidad.

Y, sin embargo, como la verdad es una sola, ambas escuelas llegan naturalmente, al mismo resultado: por el camino más directo la cinética, por otro, en general más tortuoso, la estática.

Es curioso que la escuela francesa, desde Bresse (1859) hasta los tratadistas de hoy día, haya desdeñado seguir la senda empezada á abrir por Clapeyron (1833) y proseguida por Lamé (1852). Verdad es que Clapeyron había sido precedido por los suizos Bernoulli (Daniel) y Euler (1741 y 1744), aunque sin generalizar éstos la ley de igualdad de trabajos.

El italiano Menabrea (1858), el inglés Maxwell (1864), el alemán Mohr (1874), y sobre todo el italiano Castigliano (1873 y 1879), han sido, parcialmente aquéllos, totalmente éste, los fundadores de la escuela. Y, sin embargo, no se ha desarrollado sino



entre los alemanes, con Müller Breslau á la cabeza (1884), y no ha tomado gran auge sino ya entrado este siglo, coincidiendo con la aplicación del hormigón armado en la forma tan atrevida como científica que ha alcanzado en Alemania.

Desde hace algunos años, por seguir esas aplicaciones alemanas del hormigón armado, estudiamos los procedimientos de cálculo cinético y hemos tenido ocasión de aplicarlos repetidas veces. Enamorados de su generalidad y de las ventajas que procuran, tratamos de difundir su conocimiento y de ponerlos al alcance de los compañeros que quieran utilizarlos.

Con objeto de hacer la exposición lo más clara y fácil posible, procederemos del modo más elemental, á riesgo de que se nos tilde de pesadez.

Antes de abordar el estudio del trabajo estableceremos las notaciones y representaciones que hemos de emplear.

Una fuerza, representada por un segmento de su línea de acción con su flecha, será indicada por diversas letras mayúsculas, según la clase de causa ó efecto á que se refiera: F , fuerza en general; Φ , fuerza elástica; A , acción; R , reacción, etc.

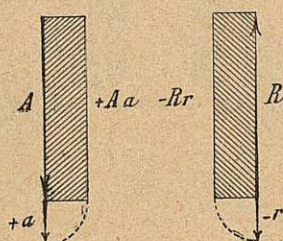


Fig. 1.^a

La proyección sobre la línea de una fuerza, del camino recorrido por su punto de aplicación, se llamará *recorrido lineal*; estará representado por otro segmento de la línea de acción, con su flecha correspondiente y afectado con los signos $+$ ó $-$, según que su dirección concuerde ó discuerde con la de la fuerza (figura 1.^a). Se designará por las minúsculas f , ϕ , a , r , etc., que en cada caso correspondan á F , Φ , A , R , etc.

El trabajo, producto de fuerza por recorrido, estará representado por el área del rectángulo Ff , $\Phi\phi$, Aa , Rr , con el mismo

signo del recorrido; á la derecha de la línea de acción si es positivo y viceversa.

El momento de un par (fig. 2.^a), área del paralelógramo construido con sus dos fuerzas, estará representado lo mismo que una fuerza, sobre cualquier línea de acción (eje) normal al plano del par. Si las escalas son:

unidad de longitud $\langle \rangle E$ unidades de fuerza
 unidad de longitud $\langle \rangle e$ unidades de recorrido

la de momentos es:

unidad de longitud $\langle \rangle Ee$ unidades de momento.

E , e , (Ee) , son así magnitudes del orden cero, números abstractos. Las designaciones serán: m , momento en general, ó también de empotramiento; A , acción; R , reacción (acciones y reacciones pueden ser del género fuerza ó del género momento).

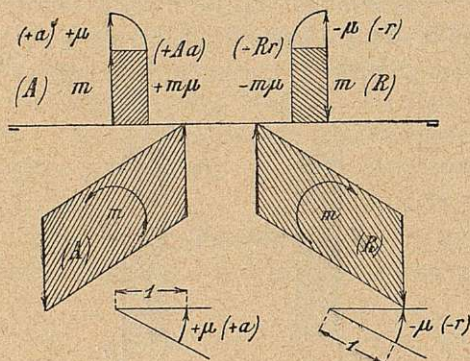


Fig. 2.^a

El ángulo descrito por cualquier línea del plano del par se llamará *recorrido angular*; estará representado por un segmento medido en el mismo eje arbitrario del par, afectado por el signo + si el sentido del giro concuerda con el del momento y viceversa. Su escala será:

unidad de longitud $\langle \rangle$ unidad de ángulo

y su designación:

μ , a , r , etc., correlativa con m , A , R , etc.

El trabajo, producto del momento por el ángulo girado, estará representado por el área del rectángulo $m\mu$, Aa , Rr , etc., con el mismo signo del recorrido angular y á derecha ó izquierda del eje, según sea $+$ ó $-$.

La escala de trabajos es naturalmente la misma, procedan de fuerzas ó de momentos:

unidad de superficie $\langle \rangle$ (Ee) unidades de trabajo;

Recordemos que los pares se proyectan, componen, etc., lo mismo que las fuerzas, operando sobre los ejes que en magnitud y sentido los representan, y que del mismo modo se procede con los recorridos angulares ó rotaciones. Así, pues, en el caso más general de considerar un momento, representado por su eje y un ángulo de giro alrededor de otro eje, llamaremos *recorrido angular* correspondiente al momento á la proyección sobre su eje del segmento representativo del giro.

Observemos que como las fuerzas y momentos pueden tener cualquier dirección en el espacio, no cabe atribuirles signos: sólo son éstos posibles en los trabajos y resultan sencillísimamente de la convención admitida (*).

(*) Negativo equivale á *resistente*. Como veremos, todo trabajo negativo se acumula en forma de energía potencial.



II

El trabajo virtual.

Si sobre un punto material en equilibrio actúan diversas fuerzas y el equilibrio se conserva, la suma de proyecciones de aquellas sobre cualquier dirección *arbitraria* debe ser nula:

$$\Sigma F \cos \alpha = 0.$$

Si en esa dirección se supone posible una desviación *virtual*, v , del punto, el producto $v \times \Sigma F \cos \alpha$, idéntico á la suma $\Sigma F \times (v \cos \alpha)$ es tambien necesariamente nulo.

$(v \cos \alpha)$ representa un *recorrido virtual*, f , en la dirección de cada fuerza. Como v y α son arbitrarios, f es en absoluto independiente de F .

Indicando con \bar{F} dicha independencia, el símbolo $\Sigma \bar{F} f = 0$, expresión del *trabajo virtual nulo*, es la expresión del equilibrio del punto.

Si sobre el punto actúan pares ó momentos m , debe resultar también $\Sigma m \cos \alpha = 0$ en cualquier dirección *arbitraria* en que se proyecten aquéllos. Si alrededor de esa dirección arbitraria se considera posible un giro ó *desviación angular virtual* r ,

$$r \times \Sigma m \cos \alpha = \Sigma m (r \cos \alpha) = 0.$$

$(r \cos \alpha)$ representa un *recorrido virtual*, μ , alrededor del eje de cada momento. Resulta análogamente, por la arbitrariedad de r y de α , $\Sigma \bar{m} \mu = 0$, nulidad del trabajo virtual de m .



Si, en general, actúan sobre el punto fuerzas y momentos, el equilibrio exige:

$$(1) \quad \sum \bar{F} f = 0 \quad ; \quad \sum \bar{m} \mu = 0 \quad (2)$$

Designando, en general, por \bar{C} las causas (fuerzas ó momentos) independientes de los recorridos, c , efectuados virtualmente (los lineales en las direcciones de las fuerzas, los angulares alrededor de los ejes de los momentos), las expresiones (1) y (2) se verifican siempre que $\sum \bar{C} c = \sum \bar{F} f + \sum \bar{m} \mu = 0$. Para que la suma de los productos ($\bar{C} c$) sea nula, cualesquiera que sean \bar{C} y c , se necesita imprescindiblemente que sean nulas por separado las sumas $\sum \bar{F} f$, $\sum \bar{m} \mu$.

Un sistema de valores f' μ' podrá conducir á $\sum \bar{C} c = 0$ si se cumple $\sum \bar{F} f' = - \sum \bar{m} \mu'$. Con las mismas \bar{F} \bar{m} y μ' , otro sistema f'' conducirá á $\sum \bar{F} f'' \geq - \sum \bar{m} \mu'$, y no se verificaría ya $\sum \bar{C} c = 0$.

Por este mismo razonamiento, la condición $\sum \bar{C} c = 0$, extendida la suma á todas las causas \bar{C}' \bar{C}'' que actúen sobre un sistema de puntos materiales invariablemente unidos, implica necesariamente $\sum \bar{C}' c = \sum \bar{C}'' c = \dots = 0$. Un sólido indeformable permanece en equilibrio si el trabajo virtual de las causas que sobre él actúan es nulo.

Si el sólido es deformable, pero dentro del período de elasticidad perfecta (*) entre punto y punto materiales aparecen variaciones de distancia: nace un sistema de fuerzas interiores Φ , correlativo con el de causas C . Cada punto efectúa, relativamente al inmediato, un movimiento que proyectado en la dirección de Φ da un recorrido φ , correlativo con el sistema de recorridos c . Si cualesquiera que sean de una parte las causas \bar{C} y las fuerzas por ellas originadas, $\bar{\Phi}$, y de otra los recorridos c y los á ellos correspondientes, φ , la suma de todos los trabajos virtuales $\bar{C} c$ y $\bar{\Phi} \varphi$ es nula, el sólido quedará en equilibrio.

Contemos positivamente los trabajos cuando concuerdan los sentidos de causas (fuerzas ó momentos) y recorridos (lineales ó angulares). En el interior del sólido esos sentidos son siempre

(*) Ningún cuerpo la posee desde un principio. Por la reiteración ó permanencia de cargas, todos los materiales de construcción llegan á ser, dentro de ciertos límites, perfectamente elásticos.



opuestos: las fuerzas elásticas *coartan* las deformaciones de que nacen. Poniendo en evidencia el signo, la expresión del equilibrio es:

$$\Sigma \{ \bar{C}c - \bar{\Phi}\phi \} = 0$$

$$\Sigma \bar{C}c = \Sigma \bar{\Phi}\phi \quad (3)$$

ó sea la igualdad, en valor absoluto, de los trabajos virtuales de las causas externas y de las fuerzas internas, cualesquiera que sean, de una parte las causas, de otra los recorridos de éstas.

Las causas exteriores son de dos clases: acciones y reacciones. De obrar sólo las acciones el sólido se pondría y permanecería en movimiento: los cuerpos que sustentan al sólido se oponen, pero no en absoluto; ceden, deformándose y restringiendo el movimiento y de su deformación nacen las reacciones que llegan á anularlo y á dejar finalmente al sólido en equilibrio.

Un buque al que se agrega un peso, aumenta visiblemente de calado. Un puente de arco entre dos macizos de roca parece que no sufre movimiento alguno en sus arranques cuando penetra una sobrecarga. En realidad la roca cede elásticamente y, aunque en cantidad inapreciable, *se mueven* los arranques del arco.

Las causas externas satisfacen, llegado el equilibrio, á la condición *simbólica*

$$\Sigma C = \Sigma A + \Sigma R = 0 \quad (4)$$

C , A , R , representan lo mismo fuerzas que momentos. La expresión (4) involucra, de este modo, las condiciones de la Estática, seis para los sistemas de tres dimensiones y tres para los de dos.

Consecuencia de (3) y de (4) es $\Sigma \Phi = 0$, puesto que C y Φ constituyen un sistema total en equilibrio.

Toda reacción nace de una deformación del cuerpo sustentador, y, por tanto, implica un recorrido lineal ó angular, cuya proyección, r , sobre la fuerza ó sobre el eje del par, es de sentido opuesto al de éstos: la reacción *coarta* y limita la deformación. El trabajo de las reacciones es resistente, negativo: poniéndolo en evidencia resulta como condición de equilibrio:

$$\Sigma \bar{C}c = \Sigma A\bar{a} - \Sigma R\bar{r} = \Sigma \bar{\Phi}\phi. \quad (5)$$



A las acciones \bar{A} corresponden, por las formas de sustentación, determinadas reacciones \bar{R} y, por la constitución y forma del sólido, determinadas fuerzas internas $\bar{\Phi}$. A los recorridos a corresponden, análogamente, determinados r y φ . Como las variables \bar{A} , a , son en absoluto independientes una de otra, lo son también entre sí las respectivas funciones, \bar{R} respecto á r , $\bar{\Phi}$ respecto á φ . Si, cualesquiera que sean \bar{A} y a , se verifica la condición (5), el sólido elástico queda en equilibrio.

El ideal del constructor sería anular en absoluto los recorridos r . En la imposibilidad de lograrlo, se procura sustentar las construcciones de tal modo que los posibles r sean sumamente pequeños. El ideal $\sum \bar{R} r = 0$, es decir, la nulidad del trabajo puesto en juego en las sustentaciones no se alcanza por completo, pero falta poco. Así, pues, en una construcción bien establecida se puede admitir con suficiente aproximación

$$\sum \bar{A} a = \sum \bar{\Phi} \varphi. \quad (6)$$

Cada sustentación produce un sistema de reacciones infinitesimales, aplicada cada una á un punto de la superficie de contacto entre el sólido y el cuerpo sustentador. Este sistema se sustituye por uno equivalente, constituido por la fuerza y par resultantes de trasladar todas aquellas reacciones al centro de gravedad de dicha superficie. La fuerza á su vez se sustituye por sus dos componentes, vertical y horizontal. El trabajo $\bar{R} r$ equivale á la suma $\bar{V} v + \bar{H} h + \bar{m} \mu$ y la condición ideal queda expresada por

$$\sum \{ \bar{V} v + \bar{H} h + \bar{m} \mu \} = 0$$

que por el razonamiento ya conocido, y en virtud de la independencia entre reacciones y recorridos, implica la nulidad de cada uno de los trabajos $\bar{V} v$, $\bar{H} h$, $\bar{m} \mu$ relativos á cada sustentación.

Recordando que llamamos *recorrido* al efectuado según la dirección de la fuerza ó alrededor del eje del momento, se comprende que ciertas formas de sustentación permitan al sólido elástico una deformación relativamente grande, pero sin componente alguna según la dirección ó alrededor del eje; es decir; con recorrido nulo y trabajo nulo.

Las formas de sustentación de un sistema plano son tres:



apoyo *móvil*, ó de dilatación; apoyo *fijo*, ó de articulación; apoyo *completo*, ó empotramiento.

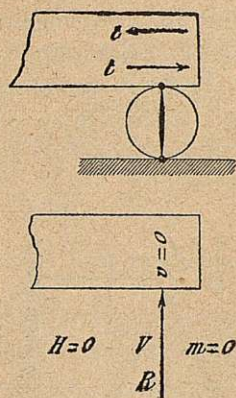


Fig. 3.^a

En el primero (fig. 3.^a), que permite una traslación t paralela á una recta dada, sólo es posible una reacción dirigida normalmente á dicha recta, pero aplicada á un punto variable según

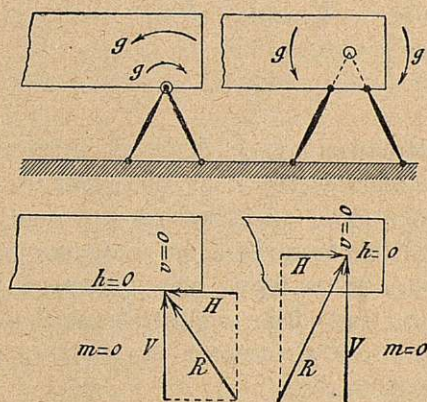


Fig. 4.^a

aquella traslación. Equivale prácticamente al apoyo sobre un rodillo. Si la traslación posible es bastante pequeña, se confunde su efecto con el de una rotación alrededor del centro instantáneo,

contacto del rodillo con el plano de rodadura y el apoyo se *simboliza* por una biela articulada al sólido y al cuerpo sustentador. No pueden existir H ni m .

En una articulación (fig. 4.^a) que permite el giro g alrededor de su centro, sólo es posible una reacción que pase por el mismo, pero su inclinación puede ser cualquiera, lo mismo que la relación de sus componentes, V , H . Se simboliza por dos bielas concurrentes: el sólido resulta articulado en la intersección, real ó virtual, de dichas bielas. No puede existir m .

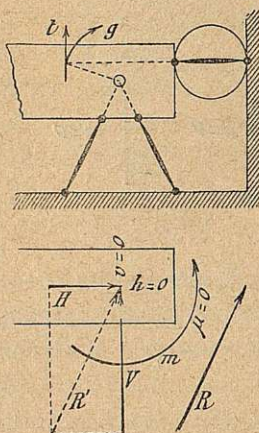


Fig. 5.^a

En un empotramiento (fig. 5.^a) que no permite ni giro ni traslación, la reacción puede pasar por cualquier punto y en cualquier dirección. Para que la sección empotrada del sólido permanezca invariable basta fijar un punto por una articulación y soportar otro en un apoyo móvil, de modo que para un punto cualquiera la traslación t , compatible con el apoyo, sea incompatible con el giro g , alrededor de la articulación. V , H , m , pueden ser cualesquiera.

Geométricamente, son nulos: en el primer caso, v ; en el segundo, v , h ; en el tercero, v , h , μ , y en todos ellos ΣRr , que es, respectivamente (ΣVv), ($\Sigma Vv + \Sigma Hh$) y ($\Sigma Vv + \Sigma Hh + \Sigma m\mu$). *Realmente*, ni rodillos, ni rótulas, aun supuestos en absoluto indeformables, dejan de presentar rozamiento, que origina en el

primer caso una reacción H , y en el segundo otra m , y oponen cierto trabajo ΣHh ó $\Sigma m \mu$. *Prácticamente*, en una construcción bien sustentada, ΣRr se puede considerar nula, y como suficientemente aproximada la condición

$$\Sigma \bar{A}a = \Sigma \bar{\Phi} \varphi \quad (6)$$

Puesto que \bar{A} y sus consecuentes $\bar{\Phi}$ son en absoluto *independientes* de a y sus correlativas φ , si á la acción unidad, aplicada á un punto determinado p , corresponde el sistema de fuerzas interiores $\Phi_{p, 1}$, la ecuación:

$$\bar{1} \times a_p = \Sigma \bar{\Phi}_{p, 1} \times \varphi \quad (7)$$

determina el recorrido a_p de aquel punto en función de los recorridos φ , cualquiera que sea el sistema (a, φ) . Si podemos calcular los φ' producidos por un sistema particular de acciones conocidas, A' , en función de los recorridos incógnitos, a' , exigidos por el equilibrio, la expresión:

$$\bar{1} \times a'_p = \Sigma \bar{\Phi}_{p, 1} \times \varphi' \quad (8)$$

determinará el recorrido a'_p del punto p cuando el sólido soporte en equilibrio el sistema A' .

Para que esto último suceda, claro es que tiene que coexistir con el sistema A' el de reacciones correspondientes R' , sin el cual no habría equilibrio posible. Y por la misma razón, con $\bar{1}$ tiene que coexistir el sistema \bar{R}_1 . Aunque los trabajos de estas reacciones se eliminen, R' y \bar{R}_1 intervienen necesariamente: las primeras en la determinación de φ' , las segundas en la de $\Phi_{p, 1}$.

a'_p está, como siempre, medido en la dirección (ó alrededor del eje) de la acción unidad aplicada á p . Las direcciones de las fuerzas moleculares Φ son siempre las mismas, variando sólo sus signos y valores: Los recorridos φ' están medidos según esas direcciones constantes.

El primer miembro de (8) mide, prescindiendo del factor unidad de acción, el recorrido lineal (ó angular) de un punto (ó una línea) del sólido sometido al sistema A' y en equilibrio. El segundo miembro valora el trabajo que las fuerzas elásticas puestas en juego al actuar la acción unidad en aquel punto (ó línea) desarrollarían si los recorridos fueran los relativos al equilibrio,



no bajo aquella acción, sino bajo el sistema A' . Este trabajo lo llamaremos *trabajo virtual unitario*.

El teorema de Mohr, expresado por (8), es:

El trabajo virtual unitario de un sistema de acciones relativamente á un punto (ó línea) mide el recorrido real de dicho punto (ó línea) determinado por aquel sistema.

Decimos *mide* porque el factor unidad de fuerza (ó de momento) multiplica siémpre el recorrido lineal (ó angular) para expresar la igualdad de dos trabajos.

Los recorridos φ son fáciles de evaluar; son los que un punto (ó línea) efectúan á causa de la deformación relativamente al punto (ó línea) contiguo.

En una pieza prismática, de coeficiente de elasticidad E y sección S , sometida á una fuerza normal, N , en el centro de gravedad, una rebanada de longitud dl sufre una contracción ó dilatación

$$dl \times \frac{N}{S} \times \frac{1}{E} = dl \times \frac{N}{ES}.$$

Este valor es el del *recorrido lineal* de cualquier punto de la sección.

Cuando la misma rebanada soporta un momento flector M , el *recorrido angular* ó giro de la sección es análogamente

$$dl \times \frac{M}{I} \times \frac{1}{E} = dl \times \frac{M}{EI}.$$

Una fuerza transversal T , ó esfuerzo cortante, aplicado al centro de gravedad, produce un recorrido lineal de todos los puntos de la sección

$$d \times \frac{T}{E_t S} \times x.$$

E_t es el coeficiente de elasticidad transversal y x un coeficiente numérico, mayor que la unidad y dependiente de la forma de la sección (*).

(*) El valor de x es, llamando D la carga de desgarramiento, variable en cada punto de la sección,

$$x = \frac{S}{T^2} \times \int D^2 dS.$$

En las secciones rectangulares $x = 1, 2$; en las doble T , aproximadamente $x = \frac{S}{\alpha \varepsilon}$, siendo α la altura total y ε el espesor del alma.



Como es sabido, las deformaciones debidas al esfuerzo constante son, en general, pequeñas comparadas con las producidas por la fuerza normal N y por el momento flector M , y se prescinde usualmente de tenerlas en cuenta.

Introduciendo estos valores en (8), si N_1 , M_1 , T_1 expresan los elementos producidos en el equilibrio bajo la acción unidad, al obrar ésta en un punto (ó línea) p y en una dirección lineal (ó angular) arbitrariamente elegida y si N , M , T son los originados en el equilibrio bajo un sistema de acciones cualesquiera, A , resulta:

$$1 \times a_p = \int N_1 \times \frac{N}{E S} dl + \int M_1 \times \frac{M}{E I} dl + \\ + \int T_1 \times \kappa \frac{T}{E_t S} dl \quad (9)$$

expresiones concretas de los recorridos reales producidos en p , según la dirección escogida, originados en el equilibrio bajo el sistema A .

Reduzcamos el sistema A á una sola acción aislada, de valor α veces la unidad, aplicada en q . N , M , T se convierten en N^1 , M^1 , T^1 para la unidad y en αN^1 , αM^1 , αT^1 para $A = (\alpha \times 1)$, en el mismo q aplicada. El recorrido

$$1 \times a_{pq} = \int N_1 \times \frac{\alpha N^1}{E S} dl + \int M_1 \times \frac{\alpha M^1}{E I} dl + \\ + \int T_1 \times \kappa \frac{\alpha T^1}{E_t S} dl$$

producido en p por la acción A que obra en q , es idéntico al escrito en otro orden:

$$\int N^1 \times \frac{\alpha N_1}{E S} dl + \int M^1 \times \frac{\alpha M_1}{E I} dl + \int T^1 \times \kappa \frac{\alpha T_1}{E_t S} dl = \\ = 1 \times a_{qp} \quad (10)$$

que, como αN_1 , αM_1 , αT_1 , corresponden á la acción $(\alpha \times 1)$ aplicada en p , mide el recorrido originado en q cuando la misma acción A obra en p .



Queda así sencillamente demostrado el teorema de Maxwell ó ley de la reciprocidad de los recorridos, cuya expresión más breve es:

$$a_{p\ q} = a_{q\ p} \quad (11)$$

El recorrido en p causado por la acción A, actuante en q, es idéntico al recorrido en q originado por la misma acción A, actuante en p.

Designemos en general por $a'_{p\ q}$ el recorrido en p , debido á la unidad en q . Si en 1, 2, 3 n , obran acciones, de valores $A_1\ A_2\ A_3\ \dots\ A_n$, el recorrido total en p vale:

$$1 \times a_{p\ (1, 2, 3 \dots n)} = a'_{p\ 1} (1 \times A_1) + a'_{p\ 2} (1 \times A_2) + \dots \\ \dots + a'_{p\ n} (1 \times A_n) \quad (12)$$

expresión cuyos términos son todos trabajos = acciones \times recorridos, que no cambian si se atribuye á la unidad en el segundo miembro la dimensión «recorrido», y al mismo tiempo á los $a'_{p\ q}$ la dimensión «cero». Así considerados los $a'_{p\ q}$ son valores numéricos, coeficientes, que miden la influencia de la posición de q respecto á p ó de p respecto á q .

Pero es más correcto considerarlos como verdaderos recorridos: los A son entonces valores numéricos, la unidad de acción se elimina en ambos miembros y el recorrido total es la suma de productos de los recorridos parciales *unitarios* por los valores numéricos de las acciones respectivas.

El teorema de Mohr no es sino una consecuencia de otro más general, y, sobre todo, de expresión más clara, precisa y elegante, relativo al trabajo *realmente* desarrollado en la deformación.



III

El trabajo real.

El trabajo *virtual unitario* es un puro ente de razón, producto de fuerzas elásticas engendradas en el equilibrio bajo la acción unidad y de recorridos *independientemente* originados en el equilibrio bajo un sistema de acciones.

El trabajo *real* elástico, producto de fuerzas y recorridos causados *ambos* en el equilibrio correspondiente á un solo sistema de acciones, que simultáneamente engendran aquéllas y éstos, depende íntimamente del modo de obrar dicho sistema y del modo de generar fuerzas y recorridos.

Un sólido, en equilibrio inicial, recibe una acción. Si ésta se manifiesta gradualmente, creciendo desde el valor cero del estado inicial, hasta adquirir su valor total al cabo de un cierto tiempo, del mismo modo irán desarrollándose gradualmente dentro del sólido las fuerzas elásticas Φ y sus recorridos ó deformaciones φ . En cualquier momento, dentro del régimen de perfecta elasticidad, unas y otros son exactamente proporcionales:

$$\varphi = k \Phi, \quad \text{ó} \quad \Phi = K \varphi$$

El trabajo elástico, gradualmente desarrollado, crece desde cero hasta

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\varphi \Phi d\varphi &= \int_0^\varphi K \varphi d\varphi = \frac{K}{2} \varphi^2 = \frac{\Phi \varphi}{2} \\ \int_0^\Phi \varphi d\Phi &= \int_0^\Phi k \Phi d\Phi = \frac{k}{2} \Phi^2 = \frac{\Phi \varphi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

siempre negativo, por ser opuestos los sentidos de Φ y φ .



Durante el mismo período, el recorrido de la acción, ó la deformación del sólido en el punto correspondiente, crece en proporción á aquella causa desde cero hasta su valor final. El trabajo puesto en juego es análogamente $\frac{Aa}{2}$. Y las reacciones del sistema sustentador desarrollan un trabajo negativo $-\frac{Rr}{2}$, prácticamente nulo.

Mientras la duración del período sea finita, el sólido elástico se anima con una velocidad y pone en juego una energía cinética $\frac{1}{2} \Sigma m v^2$ también finita. En el límite, cuando la duración crece indefinidamente, dicha energía (que en su lugar estudiaremos) tiende á anularse. El equilibrio se establece de un modo gradual y tendiendo á la *condición límite*:

$$\Sigma \frac{Aa}{2} - \Sigma \frac{Rr}{2} = \Sigma \frac{\Phi \varphi}{2};$$

ó prácticamente:

$$\Sigma \frac{Aa}{2} = \Sigma \frac{\Phi \varphi}{2}.$$

Los trabajos *reales* gradualmente puestos en juego por N, M, T , son:

$$\frac{1}{2} \int N \times \frac{N}{ES} dl = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{ES} dl \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \int M \times \frac{M}{EI} dl = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dl \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \int T \times x \frac{T}{E_t S} dl = \frac{1}{2} \int x \frac{T^2}{E_t S} dl \quad (17)$$

En el caso, más general, de no estar las acciones contenidas en el plano principal del sólido, ó de ser éste de planta curva, existe un momento de torsión M^t que en la sección de momento de inercia



polar l^t determina un recorrido angular $\frac{M^t}{E_t l^t}$ y un trabajo, por torsión,

$$\frac{1}{2} \int M^t \times \frac{M^t}{E_t l^t} dl = \frac{1}{2} \int \frac{(M^t)^2}{E_t l^t} dl$$

M^t es un elemento de cálculo completamente homólogo de los demás, N , M , T : le es aplicable cuanto respecto á éstos digamos. Como en la mayor parte de los casos prácticos M^t es nulo, prescindimos de él y del trabajo elástico que le corresponde.

Los elementos de cálculo, N , M , T , producidos en el equilibrio bajo acciones A_1 , A_2 , A_n son de la forma

$$N = N_1 \times A_1 + N_2 \times A_2 + \dots + N_n \times A_n, \text{ etc.} \quad (18)$$

llamando en general N_k , M_k , T_k los producidos en el equilibrio bajo la acción *unidad* en k . N , M , T , corresponden, naturalmente, á la coexistencia de las acciones y reacciones.

Estas son función lineal de aquéllas, y el momento parcial ($M_k \times A_k$), por ejemplo, es la suma de: $m_k \times A_k$, correspondiente á la acción por sí sola, más $m'_k R'_k = m'_k \times (\alpha' A_k)$, relativo á una reacción ($\alpha' A_k$), etc., y $M_k = m_k + \sum \alpha'_k m'_k$.

Estos valores unitarios N_k , M_k , T_k son independientes de las acciones: sólo dependen de la forma, dimensiones y propiedades elásticas del cuerpo y de las posiciones de k y de A_k . Son, finalmente, las derivadas parciales de N respecto al valor de la acción en k (*).

Si derivamos parcialmente respecto al valor de A_k la expre-

(*) Decimos *respecto al valor de la acción* y no respecto á la acción misma. Un elemento parcial, M_k , es de las mismas dimensiones que M , es decir, un momento = fuerza \times longitud. A_k no es la acción, estrictamente hablando, sino el número abstracto que mide su intensidad, su *valor*:

$$\frac{A_k \text{ unidades de acción}}{1 \text{ unidad de acción}} = A_k.$$

Se suele, sin embargo, nosotros mismos lo haremos, abreviar diciendo: «derivada respecto á la acción».



sión del trabajo elástico real y total, \mathfrak{T} , suma de (15), (16) y (17) obtenemos:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dA_k} = \int N_k \times \frac{N}{ES} dl + \int M_k \times \frac{M}{EI} dl + \\ + \int T_k \times \frac{T}{Et S} dl \quad (19)$$

cuyo segundo miembro, donde N_k , M_k , T_k son los valores de N , M , T relativos á la acción unidad en k , es idéntico al homólogo de (9), expresión del teorema de Mohr. Por tanto:

$$1 \times a_k = \frac{d\mathfrak{T}}{dA_k} \quad (20)$$

demostración del teorema de Castigliano: *La derivada parcial del trabajo elástico, respecto al valor de una acción, mide el recorrido de ésta.*

La derivada parcial de un trabajo (fuerza \times longitud, ó momento \times ángulo), respecto á una fuerza es una longitud y respecto á un momento un ángulo. La expresión (20) es absurda si la derivación se hace así. Por lo contrario, es perfectamente racional cuando se opera respecto al *valor* de la acción; la derivada es entonces otro trabajo.

Escribiendo

$$a_k = \frac{d\mathfrak{T}}{dA_k}$$

como en lo sucesivo haremos, se sobreentiende la derivación hecha respecto á la misma acción y no hay discrepancia entre las expresiones en lenguaje ordinario y matemático.

Puede darse mejor demostración de este importantísimo teorema, sin recurrir al de Mohr, que por implicar $\Sigma Rr = 0$ no es absolutamente riguroso.

Apliquemos á un sólido en equilibrio inicial una sola acción infinitesimal dA_k , que ocasiona un trabajo

$$\frac{1}{2} dA_k \times \left\{ \frac{da_k}{dA_k} \times dA_k \right\}$$



infinitesimal de segundo orden. Las reacciones correspondientes á dA_k originan otro trabajo análogo, de signo opuesto.

Apliquemos ahora el sistema finito $\Sigma A + \Sigma R$; la acción preexistente dA_k produce $dA_k \times a_k$, puesto que obra desde luego con todo su valor. En el límite de infinitesimales de primer orden:

$$\mathfrak{T} + d\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \Sigma Aa - \frac{1}{2} \Sigma Rr + dA_k \times a_k;$$

$$d\mathfrak{T} = dA_k \times a_k \quad ; \quad \frac{d\mathfrak{T}}{dA_k} = a_k.$$

Mejor todavía, la demostración más directa del teorema, sin recurrir al artificio de aplicar primero el incremento parcial y después las acciones totales, es la siguiente:

Partiendo del equilibrio bajo $\Sigma A + \Sigma R$, al incremento parcial dA_k corresponden, aparte de los infinitesimales de segundo orden, los de primero relativos á las acciones preexistentes. Cada A produce $A \times \left\{ \frac{da}{dA_k} \times dA_k \right\}$; análogamente cada R , y, en suma, el incremento de primer orden es:

$$d\mathfrak{T} = \Sigma A \times \frac{da}{dA_k} dA_k - \Sigma R \times \frac{dr}{dA_k} dA_k$$

Por tanto:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dA_k} = \Sigma A \times \frac{da}{dA_k} - \Sigma R \times \frac{dr}{dA_k} \quad (a)$$

Directamente, derivando $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \Sigma Aa - \frac{1}{2} \Sigma Rr$, y puesto que la única A dependiente de A_k es ella misma, en el producto $\frac{1}{2} A_k \times a_k$:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dA_k} = \frac{1}{2} \Sigma A \frac{da}{dA_k} - \frac{1}{2} \Sigma R \frac{dr}{dA_k} + \frac{1}{2} a_k \quad (b)$$

De (a) y (b) resulta:

$$a_k = \Sigma A \times \frac{da}{dA_k} - \Sigma R \times \frac{dr}{dA_k} = \frac{d\mathfrak{T}}{dA_k} \quad (c)$$

Como se ve, cúmplase, ó no, la condición ideal $\Sigma Rr = 0$, la derivada parcial *mide* siempre el recorrido.



La distinción entre acciones y reacciones es, desde el punto de vista mecánico, puramente convencional. El constructor diferencia las causas conocidas, acciones y los efectos *a priori* desconocidos, reacciones, que los cuerpos sustentadores han de ejercer para que el sólido quede en equilibrio. Genéricamente acciones y reacciones son todas agentes *exteriores* que por intermedio del sólido elástico se equilibran. Un número cualquiera de ellas puede ser tomado como causas y el resto como efectos, siempre que se agreguen las condiciones que definen la mutua dependencia ó correlación.

Mientras la forma, dimensiones y elasticidad del sólido sean las mismas, así como sus relaciones con los cuerpos sustentadores, idéntico resultado se obtendrá de cualquier modo que se proceda.

Las expresiones (18) y análogas valúan los elementos de cálculo, N , M , T , en función explícita de A , implícita de R , considerando como variables independientes solo las A . Lo mismo puede hacerse tomando como tales variables todas ó algunas de las R , solas ó reunidas con algunas de las A ; las restantes hasta completar el sistema ($A + R$) entrarán, implícitamente, como funciones de las independientes. A y R están además ligadas por las condiciones fundamentales del equilibrio, tres en sistemas planos, seis en los del espacio. El trabajo elástico, expresado mediante N , M , T , será función de las mismas únicas variables independientes y su derivada parcial respecto á una de ellas medirá siempre el recorrido según la dirección de la misma.

Si ese recorrido es, *por las condiciones de sustentación*, muy pequeño, *prácticamente nulo*, igualando á cero la derivada parcial correlativa, se obtendrá una condición de equilibrio *suficientemente aproximada*. Con todas las homólogas, derivadas parciales respecto á las causas cuyos recorridos sean *despreciables* (reacciones) igualadas á cero, habrá tantas ecuaciones como variables independientes y los valores de éstas requeridos por el equilibrio quedarán determinados.

La condición $\frac{d\mathfrak{T}}{dR_k} = 0$ es la necesaria y suficiente para que el valor de ella deducido para R_k haga \mathfrak{T} máximo ó mínimo. La segunda derivada

$$\frac{d^2\mathfrak{T}}{dR_k^2} = \frac{d\left(\frac{d\mathfrak{T}}{dR_k}\right)}{dR_k} = \frac{dr_k}{dR_k} \quad (21)$$



es necesariamente positiva: un incremento, dR_k , de un *agente exterior* produce una deformación elemental dirigida en el mismo sentido que R_k . El trabajo elástico es un mínimo.

De aquí otro teorema, enunciado primero por Menabrea y demostrado como consecuencia del suyo por Castigliano: *Las reacciones, cuyo trabajo es nulo, son tales, que hacen mínimo el trabajo elástico.*

Más en general todavía. Consideremos un sólido sustentado de un modo cualquiera y en equilibrio. Cortémoslo realmente en dos partes: el equilibrio subsiste si cada trozo ejerce sobre el otro una acción igual á la resultante de todas las fuerzas moleculares que antes de la escisión desarrollaba sobre aquél en la superficie separadora. Esa resultante es la fuerza de enlace.

El trabajo elástico *total* \mathfrak{T} , queda descompuesto en $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2$. Sea R_{12} la resultante de las acciones moleculares de 1 sobre 2, igual y contraria á R_{21} de 2 sobre 1. El recorrido de ($R_{12} = - R_{21}$) es:

$$r_{12} = \frac{d\mathfrak{T}_2}{dR_{12}} = - \frac{d\mathfrak{T}_2}{dR_{21}}$$

y el de R_{21}

$$r_{21} = - \frac{d\mathfrak{T}_1}{dR_{21}} = \frac{d\mathfrak{T}_1}{dR_{12}}.$$

Como cualquiera que sea el trozo que se considere el recorrido es el mismo

$$r_{12} = r_{21} = \frac{d\mathfrak{T}_2}{dR_{12}} = - \frac{d\mathfrak{T}_1}{dR_{12}}.$$

La derivada parcial de \mathfrak{T} , trabajo elástico *total*, en el sólido sin cortar, *derivada que ahora no mide recorrido alguno*, resulta en virtud de lo anterior:

$$\frac{dT}{dR_{12}} = \frac{d\mathfrak{T}_1}{dR_{12}} + \frac{d\mathfrak{T}_2}{dR_{12}} = 0 \quad (22).$$

Como un incremento de trabajo elástico total conduce necesariamente á un aumento de reacción mutua, la segunda derivada de \mathfrak{T} es positiva. El valor de R_{12} , deducido de (22), hace \mathfrak{T} *mínimo*.



Resulta así demostrado el segundo teorema de Castigliano: *Las fuerzas elásticas dentro de un sólido en equilibrio son en cada punto tales, que hacen, dentro de las condiciones de sustentación, mínimo el trabajo total de deformación elástica.*

Es sencillamente el resultado de la ley general de la naturaleza, el principio de la mínima acción. Entre todas las maneras con que un sólido puede, partiendo de un equilibrio inicial, llegar á otro equilibrio final, sujeto á las condiciones de sustentación, elige, irremisiblemente, puede decirse, aquella que, dentro de las condiciones impuestas, requiere un mínimo de trabajo, tanto de las causas exteriores como de las fuerzas moleculares interiores.

El teorema es rigurosamente exacto, sin más restricción que la general de ser las deformaciones *perfectamente elásticas*. El teorema de Menabrea, exacto solamente en el límite cuando $\Sigma Rr = 0$ resulta como corolario.

Consideremos, por ejemplo, un arco sobre dos estribos que ceden elásticamente, sustentados ambos en roca *que no ceda nada*. El sólido elástico comprende estribos y arco: las fuerzas interiores en la sección de arranques, aunque ésta ceda visiblemente, son tales que hacen mínimo el trabajo de *todo* el sistema. Si suponemos que los estribos van ganando progresivamente en rigidez seguirá cumpliéndose la condición de mínimo, pero dentro del trabajo total irá correspondiendo una parte cada vez menor á los estribos.

En el límite, cuando éstos no se deformen en absoluto, la condición persiste; el trabajo, que entonces es el del arco sólo, es un mínimo y las fuerzas interiores en los arranques pasan á ser las reacciones con recorrido y trabajo nulos.

El teorema de Maxwell, que como el de Menabrea sólo es exacto en el límite ($\Sigma Rr = 0$), resulta igualmente un corolario del de Castigliano.

El trabajo total del sistema $\Sigma A + \Sigma R$, tiende al límite ideal de perfección de las construcciones:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{1}{2} \Sigma Aa - \lim \left(\frac{1}{2} \Sigma Rr \right) = \\ &= \frac{1}{2} \{ A_1 a_1 + \dots + A_k a_k + \dots \} \end{aligned}$$



El equilibrio bajo la acción unidad ejercida en q , determina en p un recorrido a_{pq}^1 . A dicha acción corresponden ciertas reacciones indispensables para el equilibrio: a_{pq}^1 engloba el resultado del conjunto de una y de otras. Una acción A_q veces mayor, origina $a_{pq}^1 \times A_q$. El recorrido total en p , en el equilibrio bajo el sistema completo, es de la forma:

$$a_{p(1,2 \dots n)} = \frac{d\mathfrak{F}}{dA_p} =$$

$= a_{p1}^1 \times A_1 + \dots + a_{pp}^1 \times A_p + \dots + a_{pq}^1 \times A_q + \dots$ (23)
función lineal de las únicas variables independientes A , puesto que la influencia de las R , funciones también lineales de A , está comprendida dentro de las a^1 .

Al demostrar el teorema de Castigliano, hemos encontrado una ecuación (c) que en el límite, $\sum Rr = 0$, da:

$$a_p = \sum A \times \frac{da}{dA_p}$$

Su derivada respecto á A_q es:

$$\frac{da_p}{dA_q} = \sum A \times \frac{d^2a}{dA_p \times dA_q} + 1 \times \frac{da_q}{dA_p}$$

puesto que todas las A , salvo A_q á la que multiplica a_q , son independientes de A_q .

Como todas las derivadas segundas de una función lineal son nulas, resulta, según (23):

$$\left(\frac{da_p}{dA_q} = a_{pq} \right) = \left(\frac{da_q}{dA_p} = a_{qp} \right)$$

El teorema de Maxwell no es riguroso, puesto que requiere $\sum Rr = 0$.



IV

Los trabajos térmico y dinámico.

En todo lo dicho hemos supuesto acciones del género de fuerzas ó momentos que, al obrar *de un modo gradual* sobre la construcción, desarrollan un trabajo activo. Este trabajo es absorbido íntegramente por las deformaciones elásticas del sólido-construcción y de los cuerpos sustentadores, que lo conservan, tanto aquél como éstos, en estado potencial. En el caso práctico, ideal del constructor, la energía activa se almacena exclusivamente en el sólido, nada en las sustentaciones, supuestas indeformables.

Otra forma de energía activa puede, también de un modo gradual, romper el equilibrio primitivo: las alteraciones de volumen del sólido por efecto de cambio de temperatura ó de estado higrométrico.

El cambio puede ser uniforme ó variado, es decir, afectar del mismo ó de diferente modo á los diversos puntos del sólido. Sólo se acostumbra estudiar el primero, que produce, mientras una influencia extraña, la sustentación, no se le opone, una dilatación ó contracción unitaria igual en todos los puntos y direcciones.

Si la variación de volumen es uniforme y se efectúa libremente, sin que ninguna sustentación se le oponga, el sólido conserva siempre una forma semejante á la primitiva: la energía activa, suma de calorías recibidas, se guarda íntegra en el trabajo de deformación elástica y en la energía potencial que corresponde á la nueva posición del centro de gravedad.



En cuanto alguna sustentación coarta el cambio de volumen, la forma de equilibrio deja de ser semejante á la primitiva: nacen reacciones que son precisamente las necesarias para reducir la forma que el cuerpo tomaría libremente á la que toma forzado por las condiciones de sustentación.

Como no hay fuerzas ni momentos exteriores, esas reacciones constituyen necesariamente un sistema en equilibrio; nos encontramos, por tanto, en el caso general, sustituyendo al sistema $\Sigma A + \Sigma R$ el ΣR_t , totalmente desconocido.

Poco importa esto, pues expresado el trabajo elástico \mathfrak{T} en función de las variables consideradas como independientes R_t (todas menos tres, puesto que forman un sistema en equilibrio), sus derivadas parciales serán siempre los recorridos. Si una sustentación impide en absoluto el cambio de volumen según R_t , y si á la variación de dimensiones efectuada en completa libertad corresponde, también según la dirección de R_t , un recorrido ρ_t , el recorrido real de esta reacción debe ser el que anule al libremente efectuado:

$$\rho_t + \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = 0 \quad ; \quad \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = -\rho_t \quad (24)$$

Si la sustentación coarta parcialmente el cambio de dimensiones y en lugar de ρ_t , efectuado en libertad, es ρ'_t el recorrido real, el de la reacción debe ser el que lo reduzca á ese valor

$$\rho_t + \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = \rho'_t \quad ; \quad \frac{d\mathfrak{T}}{dR_t} = -(\rho_t - \rho'_t) \quad (24')$$

Si la sustentación en nada coarta el cambio de volumen, no se produce en ella reacción alguna. El sistema ΣR_t , que, como siempre, simboliza lo mismo fuerzas que momentos, así como ρ^t indica recorridos lineales ó angulares, queda perfectamente determinado. Las ecuaciones (24) tienen sus primeros miembros de la forma (19), expresados N , M , T , en función de las R_t independientes y designando N_k , M_k , T_k , las derivadas parciales respectivas con relación á la R_t correspondiente al punto ó sección k .

Si la variación de volumen no es uniforme para todos los puntos de cada sección, no es posible calcular *a priori* los recorridos ρ_t . El problema es, sin embargo, factible cuando se supone



una ley lineal de distribución de las variaciones de longitud, desde λ_s en la fibra superior, hasta λ_i en la inferior de una pieza prismática. A ellas corresponde en la fibra neutra una variación λ_o definida por:

$$\lambda_o = \lambda_s - \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} \times v_s = \lambda_i + \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} \times v_i$$

siendo e el espesor ó altura de la sección, y v_s v_i las distancias de la fibra neutra á la superior é inferior.

La sección terminal de la rebanada dl sufre entonces una traslación uniforme $dl \times \lambda_o$, más un giro, alrededor de la normal á la fibra neutra, igual al ángulo cuya tangente es

$$dl \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e}$$

y por su pequeñez se confunden, como siempre, los valores de la tangente y del ángulo.

Si N_t es la fuerza normal, función de las reacciones desconocidas R_t , el trabajo elástico relativo al recorrido uniforme $dl \times \lambda_o$, más el del mismo género $\frac{N_t}{ES} dl$, propio de N_t , vale

$$\int \frac{N_t}{ES} dl + \int \frac{N_t}{EI} dl$$

ERROR

Véase **Rectificaciones**, páginas 175 y 176.

El recorrido de una reacción R_t , que, por las condiciones del problema, sea nulo ó de un valor determinado, r_t , será la derivada parcial del trabajo elástico debido á N_t y M_t

$$\begin{aligned} \frac{d \mathcal{G}}{d R_t} &= \int \frac{M_t}{EI} \frac{d M_t}{d R_t} dl + \int \frac{N_t}{ES} \frac{d N_t}{d R_t} dl + \\ &+ \int \frac{d M_t}{d R_t} \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl + \\ &+ \int \frac{d N_t}{d R_t} \times \lambda_o dl = \begin{cases} 0 & (25) \\ r_t & (25') \end{cases} \end{aligned}$$



En cuanto alguna sustentación coarta el cambio de volumen, la forma de equilibrio deja de ser semejante á la primitiva: nacen reacciones que son precisamente las necesarias para reducir la forma que el cuerpo tomaría libremente á la que toma forzado por las condiciones de sustentación.

Como no hay fuerzas ni momentos exteriores, esas reacciones constituyen necesariamente un sistema en equilibrio; nos encontramos, por tanto, en el caso general, sustituyendo al sistema $\Sigma A + \Sigma R$ el ΣR_t , totalmente desconocido.

Poco importa esto, pues expresado el trabajo elástico \mathcal{T} en función de las variables consideradas como independientes R_t (todas menos tres, puesto que forman un sistema en equilibrio), sus derivadas parciales serán siempre los recorridos. Si una sustentación impide en absoluto el cambio de volumen según R_t , y si á la variación de dimensiones efectuada en completa libertad corresponde, también según la dirección de R_t , un recorrido ρ_t , el recorrido real de esta reacción debe ser el que anule al libremente efectuado:

$$\rho_t + \frac{d\mathcal{T}}{dR_t} = 0 \quad ; \quad \frac{d\mathcal{T}}{dR_t} = -\rho_t \quad (24)$$

Si la sustentación en nada coarta el cambio de volumen, no se produce en ella reacción alguna. El sistema ΣR_t , que, como siempre, simboliza lo mismo fuerzas que momentos, así como ρ^t indica recorridos lineales ó angulares, queda perfectamente determinado. Las ecuaciones (24) tienen sus primeros miembros de la forma (19), expresados N , M , T , en función de las R_t independientes y designando N_k , M_k , T_k , las derivadas parciales respectivas con relación á la R_t correspondiente al punto ó sección k .

Si la variación de volumen no es uniforme para todos los puntos de cada sección, no es posible calcular *a priori* los recorridos ρ_t . El problema es, sin embargo, factible cuando se supone



una ley lineal de distribución de las variaciones de longitud, desde λ_s en la fibra superior, hasta λ_i en la inferior de una pieza prismática. A ellas corresponde en la fibra neutra una variación λ_o definida por:

$$\lambda_o = \lambda_s - \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} \times v_s = \lambda_i + \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} \times v_i$$

siendo e el espesor ó altura de la sección, y v_s v_i las distancias de la fibra neutra á la superior é inferior.

La sección terminal de la rebanada dl sufre entonces una traslación uniforme $dl \times \lambda_o$, más un giro, alrededor de la normal á la fibra neutra, igual al ángulo cuya tangente es

$$dl \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e}$$

y por su pequeñez se confunden, como siempre, los valores de la tangente y del ángulo.

Si N_t es la fuerza normal, función de las reacciones desconocidas R_t , el trabajo elástico relativo al recorrido uniforme $dl \times \lambda_o$, más el del mismo género $\frac{N_t}{ES} dl$, propio de N_t , vale

$$\int \frac{N_t}{ES} dl + \int N_t \times \lambda_o dl.$$

$\int N_t \times \frac{1}{2}$

Del mismo modo al momento flector M corresponde el trabajo

$$\int \frac{M_t}{EI} dl + \int M_t \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl.$$

$\int M_t \times \frac{1}{2}$

El recorrido de una reacción R_t , que, por las condiciones del problema, sea nulo ó de un valor determinado, r_t , será la derivada parcial del trabajo elástico debido á N_t y M_t

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{U}}{dR_t} &= \int \frac{M_t}{EI} \frac{dM_t}{dR_t} dl + \int \frac{N_t}{ES} \frac{dN_t}{dR_t} dl + \\ &+ \int -\frac{dM_t}{dR_t} \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl + \\ &+ \int \frac{dN_t}{dR_t} \times \lambda_o dl = \begin{cases} 0 & (25) \\ r_t & (25') \end{cases} \end{aligned}$$



Examinemos ahora otro caso. El sólido recibe un sistema de acciones, fuerzas ó momentos, que se establecen *repentinamente* con toda su intensidad, pero sin acumulación anterior de energía. Su trabajo es, por tanto, en lugar de $\Sigma \frac{A a}{2}$, que corresponde al desarrollo gradual de cero á A y de cero á a , otro, que llamando al recorrido gradualmente alcanzado desde cero á a' bajo la acción *súbita* A , es $\Sigma A a'$.

Las fuerzas interiores Φ y sus recorridos φ se desarrollan progresivamente partiendo de cero; de otro modo habría que admitir para la propagación de las cargas y deformaciones moleculares una celeridad *infinita*. No lo es, ni mucho menos; su valor es precisamente, como luego veremos, el de la propagación del sonido $v = \sqrt{\frac{E}{d}}$ (E , coeficiente de elasticidad; d , densidad, ambos en correlativas unidades), ó sea unos 5.000 metros por segundo en el acero de construcciones. El sólido elástico es un resorte y funciona como tal: la transmisión es gradual, el trabajo elástico vale $\Sigma \frac{\Phi \varphi}{2}$ y el de las reacciones que á compás de la transmisión hasta los cuerpos sustentadores se desarrollan, — $\Sigma \frac{R r}{2}$.

Consideremos una acción cualquiera, A , que operando *estáticamente*, es decir, del modo gradual y lentísimo ya dicho, alcanza, cuando el sólido queda en equilibrio, un recorrido a_0 . Cuando la misma A opera *dinámicamente*, es decir, de un modo súbito, con todo su valor desde el principio, el equilibrio inicial se rompe y el recorrido alcanza un cierto valor a' , desarrollándose un trabajo $A a'$.

Desde luego a' es mayor que a_0 . El sólido se pone en movimiento, y cuando A ha recorrido tan sólo $\frac{a_0}{2}$, el trabajo es ya igual al compatible con el equilibrio estático.

$$\frac{A a_0}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \Sigma \Phi_0 \varphi_0 + \Sigma R_0 r_0 \right\} = \mathfrak{T}_0.$$

El exceso de trabajo puesto en juego, $A \left(a' - \frac{a_0}{2} \right)$, es una energía cinética que se va almacenando en el sólido y en las sus-



tentaciones, gradual aunque rápidamente, forzando las fuerzas elásticas, reacciones y recorridos $\Phi_0 \varphi_0$, $R_0 r_0$, relativas al equilibrio, hasta Φ' , φ' , R' , r' , simultáneos con a' .

La energía, toda ella potencial, que en ese momento acumulan el sólido y los cuerpos sustentadores

$$\mathfrak{T}_p = -\frac{1}{2} \left\{ \Sigma \Phi' \varphi' - \Sigma \Phi_0 \varphi_0 + \Sigma R' r' - \Sigma R_0 r_0 \right\}$$

es incompatible con el equilibrio correspondiente al recorrido a' . El movimiento recomienza en sentido opuesto á expensas de \mathfrak{T}_p cuyo signo hemos puesto en evidencia (fuerzas elásticas y reacciones coartan la deformación).

Si \mathfrak{T}_p subsistiera íntegro, sin pérdida alguna, el sólido y las sustentaciones proseguirían su movimiento hasta las posiciones simétricas de las relativas al recorrido total a' respecto á la posición de equilibrio, correspondiente á $\frac{a_0}{2}$, estableciéndose y conservándose indefinidamente el régimen oscilatorio entre $\left(a' - \frac{a_0}{2}\right)$ y $\left(a' - \frac{a_0}{2}\right)$, alrededor de $\frac{a_0}{2}$.

Pero la energía \mathfrak{T}_p se *disipa* gradualmente, por comunicación del movimiento al aire que envuelve al sólido y á los cuerpos sustentadores y de éstos á los que á su vez los sustentan, etc. En cada oscilación simple la energía potencial que vuelve á parecer como cinética, para nuevamente pasar á potencial, etc., es una fracción menor que la unidad, n , de la relativa á la oscilación anterior.

Esta disipación se produce desde luego y la energía acumulada cuando el recorrido primero vale a' es *realmente* $n \mathfrak{T}_p < \mathfrak{T}_p$ y sus valores sucesivos n^2 , n^3 , n^4 ... $\times \mathfrak{T}_p$, cada vez menores. El total de energía puesta en juego por la acción súbita A es:

$$n \mathfrak{T} = n A a'.$$

En el límite, cuando \mathfrak{T}_p se haya disipado por completo, quedará el sólido en equilibrio bajo la acción A obrando ya estáticamente y con una energía potencial $\mathfrak{T}_0 = -\frac{A a_0}{2}$.

Prescindiendo del estudio del movimiento vibratorio, pode-



mos, como solución práctica, la que interesa al constructor, buscar el valor de una acción A_e , tal que establecida *estáticamente* produzca el mismo trabajo molecular $n\bar{s} = n A a'$, que la acción súbita.

Dentro del límite de perfecta elasticidad, que siempre consideramos, el trabajo es proporcional á la deformación.

Las fuerzas elásticas Φ_e y reacciones R_e alcanzarán en este equilibrio gradual los mismos máximos $n \Phi'$, $n R'$ que en el primer período dinámico, si el recorrido *estático* a_e es el mismo máximo a' . La condición:

$$n A a' = \frac{1}{2} A_e \times a_e = \frac{1}{2} A_e a'$$

conduce á

$$A_e = 2 n \times A \quad (26)$$

En el límite, para n infinitamente próximo á la unidad, $A_e = 2 A$.

La aplicación súbita de una causa produce trabajo y deformación elásticos, cuyos límites son dobles que los relativos á la aplicación gradual y lentísima de la misma causa.

Esos límites son de sentidos opuestos: *superior* para el trabajo súbito é *inferior* para el trabajo indefinidamente lento. Ambos límites son inasequibles en la práctica (*). El trabajo elástico relativo á una acción que se establece con mucha rapidez, una locomotora que entra en un puente, por ejemplo, se aleja todavía bastante del doble del trabajo desarrollado por la misma cuando allí se estaciona. El coeficiente de equivalencia ($2 n$) es en la práctica tanto menor cuanto menor sea la rapidez de establecimiento (velocidad de las locomotoras), y se suele tomar para puentes de ferrocarril, como igual á 1,5.

Veamos, por fin, el caso verdaderamente dinámico: la causa exterior es una energía cinética, un choque recibido por el sólido

(*) El primero puede realizarse, casi, en un experimento. Suspendiendo un peso de un hilo combustible y graduando la tensión de éste de tal modo, que aquél toque estrictamente al sólido elástico, pero sin producir presión alguna, la combustión del hilo determina la aplicación *casi* súbita del peso. *Casi*, porque se requiere un tiempo pequeñísimo, pero finito, nunca nulo para la combustión.



elástico. El problema, de una complicación formidable en la teoría de la elasticidad, se simplifica cuando se investigan, no los efectos exactos, sino los límites de éstos, los que, por prudencia, debe tener en cuenta el constructor.

Un cuerpo de peso Q cae desde una altura α y aborda al sólido elástico con la velocidad $v = \sqrt{2g\alpha}$. El caso límite, el más desfavorable para el sólido, es el de transformación *íntegra de toda* la energía cinética, $\frac{Q}{g} \frac{v^2}{2}$, en trabajo elástico.

Jamás se llega á esto en la realidad. Si el cuerpo Q *rebota* con una velocidad ($-v'$), por pequeña que sea, la energía transformada es solamente una fracción $\frac{v^2 - v'^2}{v^2}$. Si Q *taladra* al sólido P , saliendo con la velocidad v'' , de la fracción $\frac{v^2 - v''^2}{v^2}$ absorbida por P , una parte considerable se invierte en el trabajo *plástico* de perforación, otra en el calentamiento de la zona contigua y del mismo cuerpo Q , y sólo el residuo es el que llega á interesar en forma de trabajo elástico toda la masa de P .

Entre estos dos casos extremos caben todos los intermedios, siempre con pérdida de energía por deformación plástica y calentamiento de P , de Q ó de ambos á la vez. Sólo se concibe la transformación *íntegra* como límite en el caso de choque á velocidad inferior á cierto valor crítico (como luego razonaremos) entre cuerpos que, por una parte, debieran ser ambos perfectamente elásticos, y, por otra, necesitaría ser perfectamente *inelástico* el cuerpo chocante. Aun así, como veremos, hay *siempre* una parte de energía cinética transformada en calor.

Admitamos como posible aquel caso: el cuerpo Q , *blando*, y que, sin embargo, suponemos no absorbe energía alguna deformándose, pasa bruscamente de la velocidad v á la misma velocidad v' , que adquiere en el momento del choque el sólido P . Si éste estuviera libre, v' sería la obtenida igualando cantidades de movimiento de Q y de $(P + Q)$

$$v' = v \frac{Q}{P + Q} = v \frac{1}{1 + \frac{P}{Q}}$$

Pero el movimiento de P está coartado por los cuerpos sustentadores. El punto (en que suponemos concentrado el choque)



adquiere la velocidad u' y cada uno de los demás toma la representada en general por u , nula en las sustentaciones y variable de un punto á otro, según su posición respecto á aquéllas y al punto chocado.

La fuerza viva absorbida por P es

$$\int \frac{dP}{g} \frac{u^2}{2}$$

que, como P y u' son constantes respecto á la integración, se puede poner bajo la forma

$$\begin{aligned} & \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2} \times \int dP u^2 \times \frac{1}{P u'^2} = \\ & = \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2} \int \left(\frac{u}{u'} \right)^2 \frac{dP}{P} = \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2} \times k \quad (2'') \end{aligned}$$

$\frac{P}{g} \frac{u'^2}{2}$ es la energía absorbida por P en el supuesto de que todos sus puntos adquieran la misma velocidad u' . La integral k , cuyos límites deben comprender la totalidad de P , es un número abstracto, casi siempre menor que la unidad. En efecto, la relación $\frac{u}{u'}$ de velocidades es igual á la de recorridos ó flechas de un punto cualquiera y del punto chocado, cuando en éste actúa una fuerza; las flechas de todos los puntos aumentan ó disminuyen en la misma escala y todas pasan en el mismo tiempo de cero á sus mayores valores. Conocida la ecuación de la elástica, dada por la disposición de las sustentaciones, $f = F \times \varphi(x)$, y la flecha del punto chocado x' , $f' = F \times \varphi(x')$:

$$\frac{u}{u'} = \frac{f}{f'} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x')};$$

dP es de la forma pdx ; P es una constante $= \int p dx$ y, por tanto:

$$k = \int \left(\frac{u}{u'} \right)^2 \frac{dP}{P} = \frac{1}{\int p dx} \times \int \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(x')} \right)^2 p dx \quad (28)$$

magnitud de la dimensión cero (*).

Así, pues, el efecto de las sustentaciones al restringir la libertad de movimiento del sólido P es reducir la fuerza viva que libremente absorbería $\frac{P}{g} \frac{v'^2}{2}$, á $k \times \frac{P}{g} \frac{u'^2}{2}$.

Entre la energía inicial, $\frac{Qv^2}{2g}$, y la inmediatamente después de verificado el choque, $\frac{Qu'^2}{2g} + k \frac{Pu'^2}{2g}$ hay una *pérdida*, debida al paso brusco de v á u' en el cuerpo de masa $\frac{Q}{g}$ y de cero á u en cada elemento de masa $\frac{dP}{g}$. Esta pérdida es, como no puede menos, aparente: es una transformación, *inevitable*, de energía cinética en calor que guardan Q y P . La aplicación del teorema de Borda, igualdad entre la pérdida aparente y las fuerzas vivas correspondientes á los decrementos bruscos de velocidad conduce á

$$\begin{aligned} \frac{Qv^2}{2g} - \left(Q + kP \right) \frac{u'^2}{2g} &= \frac{Q(v-u')^2}{2g} + \\ &+ \int \frac{dP}{g} \times \frac{(0-u)^2}{2} \quad (29) \end{aligned}$$

(*) En una pieza de sección constante y de longitud $2a$, $P = p \times 2a$. Si está apoyada en los extremos y chocada en el centro ($x' = a$):

$$\frac{f}{f'} = \frac{3}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^5}{a^5} \quad ; \quad k = 2 \int_0^a \left(\frac{3}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^5}{a^5} \right)^2 \frac{dx}{2a} = \frac{17}{35}$$

Si los extremos están empotrados:

$$\frac{f}{f'} = 3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^5}{a^5} \quad ; \quad k = 2 \int_0^a \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^5}{a^5} \right)^2 \frac{dx}{2a} = \frac{13}{35}$$

En la pieza de longitud a , empotrada en un extremo y chocada en el otro: $P = pa$; $x' = a$:

$$\frac{f}{f'} = \frac{3}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{x^5}{a^5} \quad ; \quad k = \int_0^a \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{x^5}{a^5} \right)^2 \frac{dx}{a} = \frac{33}{4 \times 35}$$

Cuando el punto chocado se acerca á una sustentación, k aumenta, llega á superar á la unidad, y si el choque se verifica sobre una sustentación, k se hace infinito al mismo tiempo que u' nulo.



ecuación que desarrollada y simplificada se reduce á

$$u' (Q + k P) = v Q; \quad \text{ó} \quad u' = v \frac{Q}{Q + k P} = v \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \quad (30)$$

Las cosas pasan, por lo tanto, como si la masa de P se redujera á una, en general bastante menor, $k P$, considerada en completa libertad: la ecuación (30) es la de igualdad de cantidades de movimiento de Q antes del choque y de $(Q + k P)$ después del mismo.

La energía cinética queda reducida á:

$$\begin{aligned} (Q + k P) \frac{u'^2}{2 g} &= \frac{(Q + k P)}{2 g} \frac{v^2 Q^2}{(Q + k P)^2} = \\ &= \frac{Q v^2}{2 g} \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \quad (31) \end{aligned}$$

La transformada en calor y perdida para los efectos mecánicos del choque:

$$\frac{Q v^2}{2 g} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \right\} = \frac{Q v^2}{2 g} \times \frac{1}{1 + \frac{Q}{k P}} \quad (32)$$

Al constructor no le interesa el problema del movimiento oscilatorio, sino simplemente el de evaluación del efecto del choque, supuesto el caso límite de transformarse íntegra en trabajo elástico la energía cinética subsistente.

Si una acción estática A_e produce un recorrido del mismo género, a_e , otra cualquiera que aplicada en el mismo punto origine un cierto q_ε vale, dentro siempre del período de elasti-

dad perfecta, $A_e \times \frac{q_\varepsilon}{a_e}$ y desarrolla un trabajo

$$A_e \times \frac{q_\varepsilon}{a_e} \times \frac{1}{2} q_\varepsilon .$$

Supongamos en el punto chocado una acción creciente desde cero hasta un valor tal que en su correspondiente recorrido q_ε



desarrolle un trabajo exactamente igual á toda la energía cinética subsistente (31). Los trabajos elásticos producidos por esta acción y por el choque serán idénticos.

La transformación íntegra exige $\left(\alpha = \frac{v^2}{2g}\right)$:

$$\frac{1}{2} \frac{A_e}{a_e} \times q_\varepsilon^2 = Q \alpha \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} \quad (33)$$

Si el recorrido a_e , correspondiente á A_e , lo sustituímos por el q_e , correlativo con el peso Q , estáticamente aplicado, y A_e lo reemplazamos por Q , la igualdad no se altera:

$$Q \alpha \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}} = \frac{1}{2} \frac{Q}{q_e} \times q_\varepsilon^2;$$

$$q_\varepsilon = \sqrt{\frac{2 \alpha q_e}{1 + k \frac{P}{Q}}} = q_e \sqrt{\frac{2 \alpha}{q_e \left(1 + k \frac{P}{Q}\right)}} \quad (34)$$

El recorrido q_ε es el buscado; para que el sólido alcance tal deformación en el punto chocado precisa obligarle á absorber, en forma de trabajo elástico, toda la energía subsistente:

$$Q \frac{v^2}{2g} \times \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}$$

La acción estática Q_ε , capaz de originar q_ε , y equivalente, por tanto, al máximo efecto posible del choque, es:

$$Q_\varepsilon = \frac{Q}{q_e} \times q_\varepsilon = Q \sqrt{\frac{2 \alpha}{q_e \left(1 + k \frac{P}{Q}\right)}} \quad (35)$$

En función de la velocidad $v = \sqrt{2g\alpha}$:

$$q_\varepsilon = v \sqrt{\frac{q_e}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}} \quad (34')$$

$$Q_\varepsilon = Q v \sqrt{\frac{1}{g q_e}} \sqrt{\frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}} \quad (35')$$



Si se supone despreciable la masa de P ante la de Q se obtienen las expresiones más corrientes de q_ε y Q_ε , en las que no interviene k , que se pueden aplicar, como límites, á casos en que aquella hipótesis casi se realice: una barra metálica delgada, chocada por un cuerpo bastante pesado. Pero á una construcción sería desatinado hacerlo.

Suponiendo $k = \frac{1}{2}$, para $\frac{P}{Q} = 1, 10, 25, 50, 100$, el radical $\sqrt{\frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}}$ vale, respectivamente, 0,816, 0,408, 0,272, 0,196, 0,140, lo que hace ver la exageración que se cometería al tomar simplemente, prescindiendo de aquél:

$$(34'') \quad q'_\varepsilon = \sqrt{2 \alpha q_e} \quad \text{y} \quad Q'_\varepsilon = \sqrt{\frac{2 \alpha}{q_e}} \quad (35'')$$

Aun así, la aproximación, siempre por exceso, de las expresiones (34) y (35) á la realidad, varía mucho con la altura α ó, lo que es igual, con la velocidad v .

Observemos que el trabajo de la fuerza Q_ε equivale á *toda* la energía cinética (31)

$$\frac{Q u'^2}{2g} + \frac{k P u'^2}{2g}$$

subsistente, verificado el choque, en la masa de Q y en la de kP , es decir, á la energía que conserva el cuerpo chocante y á la que anima á la construcción, y que una y otra concluyen por desaparecer en la forma cinética para almacenarse íntegras en forma de trabajo elástico, al alcanzarse el recorrido q_ε . Evaluado Q_ε no hay por qué ocuparse del peso de la construcción, que ya está involucrado en aquél.

Una misma energía $\frac{Q v^2}{2g}$, produce efectos muy distintos, según los valores de Q y de v . Un choque de 100 kilográmetros puede provenir de 10.000 kg. \times 0,010 m., con velocidad v de 0,443 m. por segundo; ó de 0,010 kg. \times 10.000 m., con $v = 443$. Si, para concretar, suponemos $P = 1.000$ kg. y $k = \frac{1}{2}$, las velocidades finales u' son respectivamente:

$$\frac{0,443}{1,05} = 0,422; \text{ y } \frac{443}{50,601} = 0,009.$$

En el primer caso apenas hay diferencia entre v y u ; en el segundo es enorme.

En una barra (fig. 6.^a) soportada por un plano rígido y sustraída á toda acción, incluso la gravedad, aplicamos súbitamente una carga, C kilogramos por unidad de superficie. En el instante inicial, la barra conserva todavía sus cargas moleculares, nulas en todas partes.

C no se transmite *instantáneamente* es decir, en un tiempo nulo, á los demás puntos de la barra: se propaga de molécula en molécula, con una velocidad w . Al cabo de un tiempo t , todas las partículas dentro del espacio wt soportan dicha carga y la llevan desde la sección terminal, donde actúa la causa, hasta la sección 11. De ésta para abajo las cargas moleculares continúan siendo todas nulas.

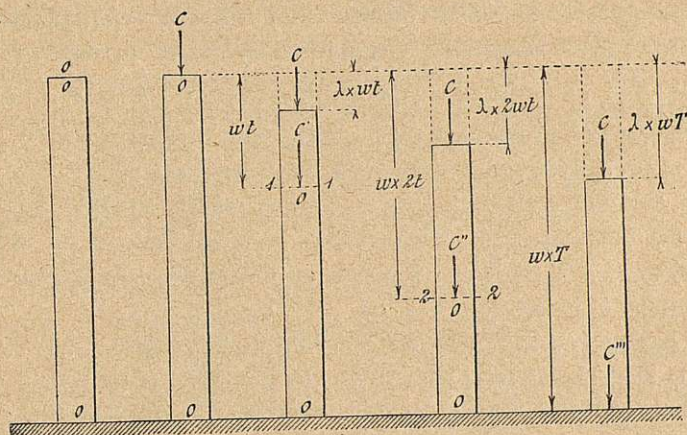


Fig. 6.^a

Si E es el coeficiente de elasticidad de la barra, la longitud cargada wt sufre una variación $\frac{C}{E} wt = \lambda \times wt$. La sección terminal ha recorrido esa distancia con una velocidad λw .

Análogamente, al cabo de un tiempo $2t$ desde el momento inicial, quedan cargadas todas las moléculas hasta la sección 22, á la distancia $w \times 2t$; las restantes continúan sin carga alguna. La variación de longitud es $\lambda \times 2wt$ y la velocidad del movimiento de la sección terminal, es siempre la misma, λw .

Se llega, finalmente, á establecer el equilibrio molecular en

toda la barra al cabo de un tiempo T , cuando C alcanza la sección inferior que descansa sobre el soporte, supuesto absolutamente rígido. El acortamiento de la longitud $l = wT$, es el total que puede sufrir la barra. La sección terminal lo ha recorrido siempre con la velocidad λw .

La *causa* (carga molecular) se propaga con una celeridad w mucho mayor que la del *efecto* (contracción ó dilatación) λw . Es una de tantas manifestaciones de la ley del retraso, universal en la naturaleza: el efecto nunca es simultáneo, sino posterior á la causa.

Para que la velocidad de la sección terminal sea mayor, es forzoso aumentar $\lambda = \frac{C}{E}$ y, por lo tanto, la carga C ; y en cuanto ésta supere á la límite de elasticidad, la deformación producida será en parte plástica ó permanente, en parte todavía elástica. Cuanto más se fuerce la velocidad de la sección terminal mayor será la variación unitaria λ' que á la materia se imponga. λ' no será ya $\frac{C}{E}$, sino la suma de una variación λ'' *todavía elástica*, inversamente proporcional á un coeficiente de elasticidad E'' , no ya el primitivo, sino uno *variable* y de otra variación λ''' *plástica*, disminuyendo tanto más E'' y preponderando tanto más λ''' , ambas funciones de la carga unitaria C , cuanto mayor sea la velocidad $\lambda'w$. Y al llegar á un cierto límite de λ' se producirá, finalmente, la rotura.

Así pues, y la experiencia lo confirma plenamente, del valor de la velocidad que al ocurrir un choque toma la superficie del sólido chocado depende que se produzcan en la zona de impacto: 1.º, deformaciones puramente elásticas cuando $\lambda = \frac{u}{w}$ es inferior á $\Lambda = \frac{L}{E}$; 2.º, deformaciones permanentes si λ excede á Λ , ó lo que es igual $u > w\Lambda$, y 3.º, si u supera mucho ese valor, la rotura del sólido chocado.

En los aceros dulces, corrientes en las construcciones, la celeridad w , que es la de propagación del sonido (*):

(*) La densidad d es la masa específica, expresada en *kilogramos-masa* por unidad de volumen. Involucra el factor $\frac{1}{g}$ y la expresión de u resulta, como debe, de la dimensión línea \times (tiempo) -1 .



$$w = \sqrt{\frac{E}{d}} = \sqrt{\frac{2.200.000 \text{ kg./cm}^2}{0,0078 \text{ kg./cm}^3}} = 530000 \text{ cm. ó } 5306 \text{ m. por 1''}.$$

La carga límite elástica vale de 2.500 á 3.500 kg./cm² y la variación límite, Δ de 0,001.14 á 0,001.36. La velocidad crítica, $w\Delta$, á partir de la cual aparecen las deformaciones permanentes, resulta de 6 á 7,20 metros por segundo.

Volviendo al ejemplo concreto, dentro del período en que v desciende de su valor inicial, 443 metros por segundo, los puntos del sólido en contacto con Q (los valores numéricos corresponden sensiblemente á los de una bala de fusil Remington), toman forzosamente *al principio* velocidades del orden de aquélla, mucho mayores que el límite 7,20. La materia es *arrollada* en la zona de impacto; la energía del choque *no tiene tiempo* para transmitirse lateralmente é interesar el resto del sólido más que en pequenísimas proporción y se gasta casi íntegra en taladrarlo total ó parcialmente. Se transforma, por fin, en calor, salvo una parte insignificante transmitida hasta las sustentaciones y almacenada en forma de trabajo elástico en ellas y en el sólido.

De ahí nace la importancia capital de forzar la velocidad en las armas de fuego, y, por lo contrario, de aumentar la relación Δ , forzando la carga límite elástica L , en los blindajes. Claro que el espesor del sólido interviene eficazmente, más que por el aumento de masa, por *sostener*, por decirlo así, las capas inferiores, á las que no llega íntegra, sino muy reducida, la velocidad destructiva u , á las capas superiores, ya taladradas las primeras, aplastadas las siguientes, menos deformadas las subsiguientes, etcétera, hasta llegar, si el espesor es grande, por minoración progresiva de u á valores de ésta inferiores á Δw , que sólo producen deformaciones elásticas.

A medida que, á igualdad de fuerza viva $\frac{Qv^2}{2g}$, aumenta Q y disminuye v , los efectos plásticos y caloríficos, que no sólo afectan al sólido P , sino también al cuerpo Q , absorbiendo en uno y en otro una porción considerable de la energía del choque, van siendo menores y cada vez mayor la porción transformada y almacenada en trabajo elástico.

El límite, la transformación íntegra, no se realiza nunca, como ya hemos visto, (31), aún tratándose de masas muy pesadas



y á cortísima velocidad: hay siempre una *disipación* de energía, favorable á la resistencia del sólido, en forma de elevación de temperatura en la zona de contacto de P y Q , rebote de éste en muchos casos, en otras deformaciones plásticas locales por verificarse el contacto en superficie muy pequeña, vibraciones sonoras, etc. Las expresiones (34) y (35) son *límites* y la exageración que implican puede ser muy grande. Tomándolas como *ciertas* hay completa seguridad.

El cálculo de la acción de un choque, $Q \propto = \frac{Q v^2}{2g}$ kilogramos, se reduce á determinar las cargas sufridas por la construcción y la flecha q_e bajo la acción *gradual* de Q kilogramos y á multiplicar los valores de aquéllas por el amplificador

$$\sqrt{\frac{2 \alpha}{q_e \left(1 + k \frac{P}{Q} \right)}} \quad (36)$$

que afecta igualmente á todas las flechas calculadas bajo la acción de Q . Si la construcción es hiperestática, las reacciones, fuerzas ó momentos, correlativos al peso gradual Q , también sufrirán igual amplificación. El cálculo viene á ser, por tanto, de falsa posición.



V

Aplicaciones generales.

Recapitulemos lo expuesto para concretar su aplicación práctica.

El trabajo elástico, gradualmente desarrollado, es:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T})_0^1 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{M^2}{EI} dl + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{N^2}{ES} dl + \\ & + \frac{1}{2} \times \int_0^1 \frac{T^2}{E_t S} dl \quad (37) \end{aligned}$$

Si ha lugar á ello, está complementado con el término relativo á la torsión:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(M_t)^2}{E_t I_t} \quad (37')$$

Y si hay una variación lineal desde λ_s hasta λ_i en las fibras superior é inferior, distantes entre sí e y á las que corresponde en la fibra neutra λ_0 comprende también los términos:

$$\int_0^1 M \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl + \int_0^1 N \times \lambda_0 dl \quad (37'')$$

\mathfrak{F} es una función: 1.º, de los elementos de cálculo $M N T$, á su vez funciones de las causas exteriores al sólido, $\Sigma A + \Sigma R$, en magnitud y posición; 2.º, de las dimensiones y forma del sólido, caracterizadas por S é I , en general variables, así como de su elasticidad, generalmente supuesta constante.

Hay, por lo tanto, una variable *fundamental* geométrica, l , longitud contada á lo largo del eje neutro á partir de un origen. S é I son funciones explícitas de l ; M , N , T también lo son. Al integrar entre cero y un valor particular de l , l_p , se totaliza el trabajo elástico desarrollado en el trozo de sólido comprendido entre el origen, un extremo generalmente y la sección definida por el subíndice p , de área y momento de inercia S_p , I_p .

Ese trabajo, ya integrado, $(\mathfrak{F})_0^{l_p}$ es una expresión *independiente* de la variable l . Si son conocidas todas las causas $\Sigma A + \Sigma R$ y se introducen sus valores, $(\mathfrak{F})_0^{l_p}$ se reduce á un número concreto de unidades de trabajo.

Si los valores introducidos son todos numéricamente conocidos menos uno, el de la causa exterior, acción ó reacción *que obra precisamente* en la situación definida por l_p , $(\mathfrak{F})_0^{l_p}$ no es ya un número concreto de kilogrametros, sino una función lineal de la causa C_p

$$(\mathfrak{F})_0^{l_p} = (p) \times C_p$$

en la que (p) es una magnitud concreta de la dimensión línea ó ángulo (uno ó cero) según que C_p sea una fuerza ó un momento.

Si, aunque C_p sea desde luego conocido, se le supone capaz de variar sufriendo un incremento infinitesimal, á compás del cual $(\mathfrak{F})_0^{l_p}$ sufriría otro, la relación de incrementos $\frac{\text{trabajo}}{\text{causa}}$ es decir, la derivada

$$\frac{d (\mathfrak{F})_0^{l_p}}{d C_p} = (p) \quad (38)$$

es el recorrido de la causa C_p .

Recordemos que (p) se mide en la línea ó eje de C_p y que su signo es $+$ ó $-$, según que su dirección concuerde ó discuerde con la de C_p .



Si la causa C_p es todavía incógnita y, por lo contrario, conocemos *a priori* su recorrido, (38) nos permite evaluarla.

Hemos supuesto previamente conocidas todas las demás causas C . En ciertos casos, sistemas isostáticos, lo son, por las ecuaciones generales del equilibrio, mucho más sencillas que (38). En otros, sistemas hiperestáticos, del conjunto $\Sigma C = \Sigma A + \Sigma R$, conocemos desde luego todas las A y, mediante dichas ecuaciones, algunas (3 ó 6), de las R ; hay, ante todo, que determinar las R restantes.

Si las sustentaciones de un sistema plano son en número de:

- ϵ , empotramientos;
- α , articulaciones;
- δ , apoyos de dilatación,

el número total de reacciones es:

y el de indeterminadas $(3\epsilon + 2\alpha + \delta) - 3 = (i)$. (Los alemanes suelen decir «sistema i veces indeterminado».) Conocidas todas las A , tres de las R se expresan en función de ellas y de las (i) R

ERROR

Véase **Rectificaciones**, páginas 175 y 176.

mente respecto á R_m, R_n, R_p, \dots tendremos tantas ecuaciones:

$$\frac{d(\mathcal{T})_o^{l_m}}{dR_m} = (\rho)_m; \quad \frac{d(\mathcal{T})_o^{l_n}}{dR_n} = (\rho)_n$$

$$\frac{d(\mathcal{T})_o^{l_p}}{dR_p} = (\rho)_p; \dots$$

como incógnitas. Y siempre que conozcamos desde luego los respectivos recorridos (ρ) el problema estará resuelto.



\mathfrak{F} es una función: 1.º, de los elementos de cálculo $M N T$, á su vez funciones de las causas exteriores al sólido, $\Sigma A + \Sigma R$, en magnitud y posición; 2.º, de las dimensiones y forma del sólido, caracterizadas por S é I , en general variables, así como de su elasticidad, generalmente supuesta constante.

Hay, por lo tanto, una variable *fundamental* geométrica, l , longitud contada á lo largo del eje neutro á partir de un origen. S é I son funciones explícitas de l ; M , N , T también lo son. Al integrar entre cero y un valor particular de l , l_p , se totaliza el trabajo elástico desarrollado en el trozo de sólido comprendido entre el origen, un extremo generalmente y la sección definida por el subíndice p , de área y momento de inercia S_p , I_p .

Ese trabajo, ya integrado, $(\mathfrak{F})_0^{l_p}$ es una expresión *independiente* de la variable l . Si son conocidas todas las causas $\Sigma A + \Sigma R$ y se introducen sus valores, $(\mathfrak{F})_0^{l_p}$ se reduce á un número concreto de

ERROR

Véase **Rectificaciones**, páginas 175 y 176.

un número concreto de kilográmetros, sino una función lineal de la causa C_p

variar sufriendo un incremento infinitesimal, $(\mathfrak{F})_0^{l_p}$ sufriría otro, la relación de incrementos $\frac{\text{trabajo}}{\text{causa}}$ es decir, la derivada

$$\frac{d (\mathfrak{F})_0^{l_p}}{d C_p} = (p) \quad (38)$$

es el recorrido de la causa C_p .

Recordemos que (p) se mide en la línea ó eje de C_p y que su signo es $+$ ó $-$, según que su dirección concuerde ó discuerde con la de C_p .



Si la causa C_p es todavía incógnita y, por lo contrario, conocemos *a priori* su recorrido, (38) nos permite evaluarla.

Hemos supuesto previamente conocidas todas las demás causas C . En ciertos casos, sistemas isostáticos, lo son, por las ecuaciones generales del equilibrio, mucho más sencillas que (38). En otros, sistemas hiperestáticos, del conjunto $\Sigma C = \Sigma A + \Sigma R$, conocemos desde luego todas las A y, mediante dichas ecuaciones, algunas (3 ó 6), de las R ; hay, ante todo, que determinar las R restantes.

Si las sustentaciones de un sistema plano son en número de:

- ϵ , empotramientos;
- α , articulaciones;
- δ , apoyos de dilatación,

el número total de reacciones es:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon (V, H, m) &= 3 \epsilon \\ \alpha (V, H, o) &= 2 \alpha \\ \delta (V, o, o) &= \delta \end{aligned} \right\} 3 \epsilon + 2 \alpha + \delta$$

y el de indeterminadas $(3 \epsilon + 2 \alpha + \delta) - 3 = (i)$. (Los alemanes suelen decir «sistema i veces indeterminado».) Conocidas todas las A , tres de las R se expresan en función de ellas y de las (i) R restantes; éstas son las únicas variables independientes y mediante ellas y la variable fundamental l se formulan M , N , T .

Si m , n , p son los subíndices que corresponden á las sustentaciones que dan esas R ; si hacemos las integraciones respectivas de (37) desde cero á l_m , l_n , l_p y derivamos parcialmente respecto á R_m , R_n , R_p tendremos tantas ecuaciones:

$$\frac{d(\mathcal{F})_o^{l_m}}{d R_m} = (p)_m; \quad \frac{d(\mathcal{F})_o^{l_n}}{d R_n} = (p)_n$$

$$\frac{d(\mathcal{F})_o^{l_p}}{d R_p} = (p)_p; \quad \dots\dots$$

como incógnitas. Y siempre que conozcamos desde luego los respectivos recorridos (p) el problema estará resuelto.



Los recorridos (ρ) de las reacciones son: 1.º, nulos, como límite ideal de perfección, al que se aproxima muchísimo una obra bien sustentada; 2.º, desconocidos, pero calculables en función de la reacción correspondiente; por ejemplo, en un soporte de longitud L_s , sección S_s y coeficiente de elasticidad E_s :

$$(\rho)_p = R_p \times \frac{L_s}{E_s S_s} \quad (39)$$

3.º Calculables por las condiciones de cambio de volumen, como ya hemos visto (24) y (25).

En suma, llegamos á conocer totalmente con las R el sistema ΣC , y entonces podemos calcular las deformaciones de cualquier parte de la obra.

El procedimiento no puede ser más general. Basta saber bien la marcha, que es siempre la misma, para resolver toda clase de problemas.

En la práctica conviene invertir el orden en que, por claridad lo hemos expuesto. Es más sencillo, y claro que nada afecta al resultado, empezar por la derivación bajo el signo f y dejar para lo último la integración entre los límites debidos.

Así, pues, se parte de la expresión, función de las derivadas parciales;

$$\frac{d (\mathfrak{F})_o^1}{d C_p} = \int_0^{1_p} \frac{M}{EI} \times \frac{d M}{d C_p} dl + \int_0^{1_p} \frac{N}{ES} \times \frac{d N}{d C_p} dl + x \int_0^{1_p} \frac{T}{E_t S} \times \frac{d T}{d C_p} dl \quad (39)$$

Recordemos que las derivadas parciales de M , N , T , son los valores particulares de estos elementos, cuando el equilibrio se establece bajo la única acción unidad en lugar de C_p y las demás acciones se anulan. Se pueden obtener aquéllas derivando M , N , T , ó bien escribiendo directamente sus expresiones en el equilibrio unitario antedicho.

Tal como hemos expuesto los teoremas de Castigliano y de Mohr, *parece* que el cálculo del recorrido de un punto (ó de una sección) donde *no obre acción ninguna* es imposible. Según el pri-

mero, hay que derivar respecto á una acción *que no existe*; conforme al segundo, hay que sustituir esa misma acción cero por la unidad, lo que no parece legítimo.

Si introducimos en el punto (ó sección) de que se trate una acción infinitesimal, dY , el recorrido incógnito, y , producido por el sistema ΣA , sufrirá un incremento, dy .

Los elementos de cálculo, M , N , T , sufrirán sus respectivos incrementos y serán ahora de la forma:

$$(M + dM) = (M_1 A_1 + \dots + M_k A_k + \dots) + M_y \times dY \quad (40)$$

y análogos.

El trabajo elástico se convertirá en $(\mathfrak{T} + d\mathfrak{T})$ y el recorrido de dY será, como siempre (39):

$$\frac{d(\mathfrak{T} + d\mathfrak{T})_0^y}{d(dY)} = \\ = \int_0^y \frac{(M + dM)}{EI} \times \frac{d(M + dM)}{d(dY)} dl + \text{etc.} = y + dy \quad (41)$$

La derivada parcial de $(M + dM)$ respecto á la acción dY será M_y , es decir, el valor de $(M + dM)$ cuando $(A_1 \dots A_k \dots)$, se anulan y se sustituye dY por *uno*. El recorrido (41) es, pues:

$$y + dy = \int_0^y \frac{(M + dM)}{EI} \times M_y \times dl + \text{etc.}$$

cuyo límite, el recorrido buscado *cuando sólo existe* ΣA , es:

$$y = \int_0^y \frac{M}{EI} \times M_y dl + \text{etc.} \quad (42)$$

puesto que dy es de primer orden, lo mismo que $\int (dM) dl$, mientras que y , M , M_y , son todos finitos.

Basta, por tanto, introducir la acción unidad en el punto ó sección considerados y obtener los valores de M , N , T correspondientes al equilibrio, que sustituyen exactamente á las derivadas parciales del caso general. Dicha acción unidad será de fuerza, ó



de momento, según que el recorrido que se quiere calcular sea lineal ó angular.

Se prescinde casi siempre de tener en cuenta las fuerzas tangenciales ó esfuerzos cortantes, T : su influencia en la deformación, y más todavía en el valor total del trabajo elástico, es pequeña. La complicación que introducen en el cálculo hace que tan sólo en uno comprobativo muy minucioso y de una construcción muy escatimada en dimensiones, valga la pena de apurar la exactitud. Los ejemplos lo demostrarán.

En muchas construcciones la influencia de las fuerzas normales, N , es también pequeña comparada con la de los momentos flectores, M , y se puede, por lo menos en una aproximación, prescindir de aquéllas. En otros casos, por ejemplo en los arcos muy rebajados, predominan los trabajos debidos á N con relación á los originados por M y constituiría *grave error* prescindir de aquéllos. (*)

La serie de ejemplos consecutivos pondrá de manifiesto cuanto queda dicho y aclarará la manera de desarrollar el procedimiento.

Ejemplo primero.

Una pieza de sección constante está empotrada en un extremo y sometida en el otro á una acción P , normal al eje (fig. 7.^a)

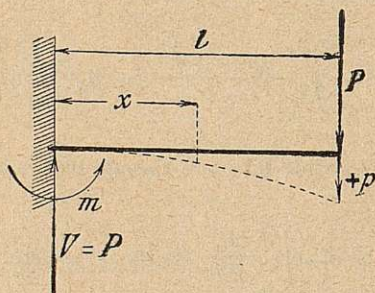


Fig. 7.^a

Son conocidas desde luego: la reacción-fuerza $V = P$ y la reacción-momento $m = - Pl$, con el signo de manifiesto, porque

(*) En un arco parabólico articulado, uniformemente cargado según la cuerda, M es constantemente nulo, como en su recíproco, puente colgado y como en el arco en catenaria uniformemente cargado á lo largo de la fibra neutra.

el momento de la acción es positivo (sentido de las agujas de un reloj). Sustituiremos por x la variable fundamental l .

En un punto cualquiera, x , como $v = P$,

$$M = -Pl + Px \quad ; \quad \frac{dM}{dP} = (x - l).$$

N es nulo: prescindiendo por ahora del esfuerzo cortante ($T = V$):

$$\begin{aligned} \frac{d(\overline{S})_0^1}{dP} &= \int_0^1 \frac{P(x-l)}{EI} \times (x-l) dx = \\ &= \frac{P}{EI} \left\{ \frac{l^3}{3} - 2 \frac{l^3}{2} + l^3 \right\} = \frac{Pl^3}{EI} \times \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

El recorrido de la acción P es la flecha, de expresión bien conocida, $\frac{Pl^3}{3EI}$, en el mismo sentido de P , puesto que su signo es positivo.

La deformación en un punto cualquiera de abscisa ξ , donde no hay acción ninguna, requiere, como hemos visto, considerar el equilibrio bajo la acción unidad allí supuesta. Los valores:

$$\begin{aligned} M_\xi &= -1 \times \xi + 1 \times x \text{ (desde } x=0 \text{ hasta } x=\xi) \} \\ M_\xi &= 0 \text{ (desde } x=\xi \text{ hasta } x=l) \} \end{aligned}$$

sustituyen á las derivadas parciales corrientes.

$$\begin{aligned} y_\xi &= \int_0^\xi \frac{P}{EI} (x-l)(x-\xi) dx = \\ &= \frac{P}{EI} \int_0^\xi (x^2 - lx - \xi x + l\xi) dx = \\ &= \frac{P}{EI} \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{2} + l\xi^2 \right) = \frac{P}{EI} \left(\frac{l\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right) = y_\xi \end{aligned}$$

expresión idéntica á la ecuación de la elástica, obtenida, como de costumbre, por doble integración de $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$.



El teorema de Castigliano da la ecuación de la elástica por *simple* integración y las constantes resultan desde luego determinadas.

Si introducimos el término debido al esfuerzo cortante, T , para hacer *exacto* el resultado *aproximado*:

$$I = V = P; \quad \frac{dI}{dP} = 1$$

$$\frac{d(\overline{S})_0^1}{dP} = \frac{Pl^3}{3EI} + \alpha \int_0^1 \frac{P}{E_t S} \times 1 \times dx.$$

Para el valor ordinario de la elasticidad transversal $E_t = 0,4 E$, el recorrido exacto p es, llamando $f = \frac{Pl^3}{EI}$ la flecha aproximada,

$$p = f + \alpha \frac{Pl}{0,4 ES}.$$

Si la sección S es rectangular, de anchura a y altura una fracción de la longitud, nl , ($n < 1$), el coeficiente de forma, α , vale 1,2:

$$p = \frac{Pl^3}{3E \times \frac{an^3 l^3}{12}} + \frac{1,2}{0,4} \frac{Pl}{Eant} = \frac{Pl}{ES} \left\{ \frac{4}{n^2} + 0,3 \right\}$$

Cuanto más pequeña es n , es decir, cuanto menor es el peralte de la pieza, menor es la influencia de T .

Para $n = 0,5$, $0,2$, $0,1$, la flecha parcial debida á T es 0,019, 0,003, 0,000.75 de la correspondiente á M . El error relativo cometido es en cada caso algo menor que esos números.

Y obsérvese que la influencia de T , constante en toda la longitud de la pieza, está favorecida al máximo.

Ejemplo segundo.

La misma pieza está ayudada por un tirante articulado á ella y al muro (fig. 8.^a).

El sistema es hiperestático, dos veces indeterminado: sólo se sabe por la Estática:

$$H + H' = 0 \quad ; \quad V + V' + P = 0 \quad ; \quad Pl - Hd + m = 0.$$

Preferimos, siempre que un momento es desconocido, atribuirle un valor positivo: el cálculo se encarga de confirmarlo ó de negarlo.

Análogamente, las reacciones fuerzas, que en el ejemplo anterior dibujamos, desde luego, en su dirección, escribiendo $V = P$, pueden, y en general es preferible, suponerse, como hacemos en este ejemplo, positivas en la misma dirección que P , escribiendo $V + V' + P = 0$.

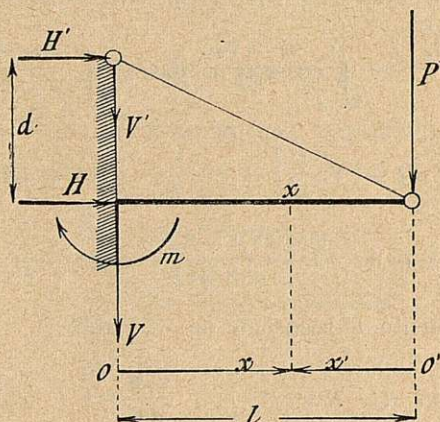


Fig. 8.^a

En una primera aproximación prescindiremos del trabajo elástico del tirante, suponiendo éste infinitamente rígido; su papel es introducir *geométricamente* una reacción oblicua en el extremo de la pieza.

$$M = m - Vx; N = H = \frac{m + Pl}{d}; \frac{dM}{dm} = 1; \frac{dN}{dm} = \frac{1}{d}.$$

El recorrido μ de m debe ser nulo si el empotramiento está bien hecho. Según la regla expuesta, deberíamos tomar como origen el extremo de la pieza O' é integrar hasta el empotramiento. Como los momentos en una misma sección (fig. 8.^a) son iguales y contrarios, según se considere el trozo á la derecha ó á la izquierda de la misma $M = -M'$; $dM = -dM'$ y el producto

$M' dM'$ relativo á cualquier sección es idéntico al MdM . El total, de extremo á extremo, es:

$$\int_{o'}^0 M' dM' = \int_o^{o'} MdM.$$

Recuérdese además que el trabajo elástico (37) es función de los cuadrados de M , N , T , cuyos signos en nada influyen. El trabajo elástico *total*, cantidad esencialmente positiva, es el mismo en cualquier sentido que se cuente la variable fundamental l .

$$\mu = \frac{d(\mathfrak{T})_o^1}{dm} = \int_o^1 \frac{m - Vx}{EI} dx + \int_o^1 \frac{m + Pl}{d^2 \times ES} dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left\{ ml - V \frac{l^2}{2} \right\} + \frac{1}{d^2 ES} \left\{ ml + Pl^2 \right\} = 0$$

$$m = \frac{V \times d^2 S - 2P \times I}{d^2 S + I} \times \frac{l}{2}.$$

Análogamente, el recorrido de V es nulo:

$$M = m - Vx \quad ; \quad N = H \quad ; \quad \frac{dM}{dV} = -x \quad ; \quad \frac{dN}{dV} = 0$$

$$v = \frac{d(\mathfrak{T})_o^1}{dV} = \int_o^1 \frac{m - Vx}{EI} x dx = \frac{1}{EI} \left\{ m \frac{l^2}{2} - V \frac{l^3}{3} \right\} = 0$$

$$m = \frac{2}{3} V l$$

que juntamente con la anterior, determina V y m .

$$V = - \frac{6 I}{4 I + S d^2} P \quad ; \quad m = - \frac{4 I}{4 I + S d^2} Pl$$

y con la de momentos estáticos:

$$H = \frac{m + Pl}{d} = \frac{Sd}{4 I + S d^2} P = - H'$$

Los signos negativos de V , m y H' demuestran, como dijimos, los verdaderos sentidos que les corresponden, opuestos á los representados: el de H , positivo, es el mismo de la figura.



Para $d = 0$, $m = -Pl$, $H = 0$. Es de notar que V resulta entonces $= -\frac{3}{2}P$, pero V' existe siempre, y en ese caso la reacción es la suma de las dos que allí se reúnen

$$V + V' = -P.$$

Como se ve, es siempre la misma serie de operaciones la que resuelve todos los problemas, con la máxima sencillez compatible con la índole de los sistemas hiperestáticos. El ejemplo presente se complica más, si, como en otro análogo haremos, se tiene en cuenta la elasticidad propia del tirante (ó tornapunta).

Ejemplo tercero.

Sea (fig. 9.^a) una pieza empotrada y sometida á una carga uniforme.

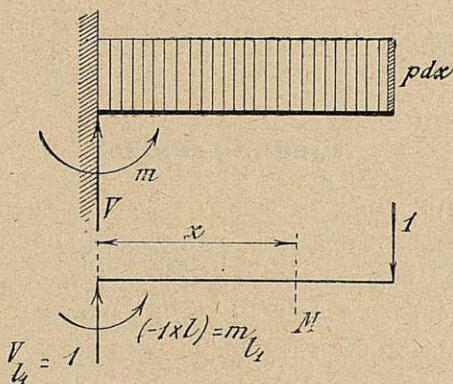


Fig. 9.^a

El sistema ΣA es ahora $\int_0^l (p dx)$, suma de infinitas acciones ($p dx$). Según la regla general, para hallar el recorrido de un punto debiéramos derivar M , N , respecto á la acción ($p dx$) que allí se ejerce, derivación que resulta imposible en general.

En este caso:

$$m = -p \frac{l^2}{2} ; V = -pl ; M = -p \frac{l^2}{2} + p l x - p \frac{x^2}{2} = -\frac{p}{2} (l - x)^2$$

y no se puede calcular directamente $\frac{dM}{d(p dx)}$.

Recordemos que, cualquiera que sea el número y distribución de acciones, las derivadas parciales de M , N , T , respecto á una de aquéllas, son los valores particulares que M , N , T , toman en el equilibrio bajo la *única* acción unidad en aquel punto aplicada. Las derivadas se pueden, por tanto, escribir directamente, lo mismo que cuando en el punto no hay acción alguna.

Así, para la unidad en el extremo de la pieza (fig. 9.^a) indicando con los subíndices (l 1) «bajo la unidad actuante en l ».

$$m_{l1} = -1 \times l \quad ; \quad V_{l1} = 1 \quad ; \quad M_{x(l1)} = -1 \times l + 1 \times x = \\ = x - l = \frac{dM}{d(pdx)_l}.$$

$$\frac{d(\mathfrak{F})_0^1}{d(pdx)_l} = \int_0^l -\frac{p}{2} \times \frac{(l-x)^2 \times (x-l) dx}{EI} = \\ = -\frac{p}{2EI} \left(\frac{l^4}{4} - 3 \frac{l^4}{3} + 3 \frac{l^4}{2} - l^4 \right) = + \frac{pl^4}{8EI}.$$

Ejemplo cuarto.

Sea (fig. 10) la misma pieza anterior, apeada en su extremo sobre un puntal de madera floja, coeficiente de elasticidad E' , longitud λ y sección s . El sistema se ha hecho hiperestático: la reacción del puntal y las dos del empotramiento son desconocidas, pero están ligadas por

$$m + p \frac{l^2}{2} - Rl = 0 \quad ; \quad V + R = pl.$$

El recorrido del extremo será el acortamiento del puntal,

$$\frac{R}{s} \times \frac{\lambda}{E'},$$

con signo — por ser su sentido opuesto al de R .

$$M = m + Vx - p \frac{x^2}{2} = \\ = R(l-x) - \frac{p}{2} (l-x)^2 \quad ; \quad \frac{dM}{dR} = (l-x)$$



$$\begin{aligned} \frac{d(\mathfrak{F})_0^1}{dR} &= \int_0^1 \frac{1}{EI} \left\{ R(l-x)^2 - \frac{p}{2}(l-x)^3 \right\} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{Rl^3}{3} - \frac{pl^4}{8} \right\} = - \frac{R\lambda}{E's} \\ \frac{pl^4}{8EI} &= R \left\{ \frac{\lambda}{E's} + \frac{l^3}{3EI} \right\}; \quad R = \frac{pl^4}{8EI \left(\frac{\lambda}{E's} + \frac{l^3}{3EI} \right)} \end{aligned}$$

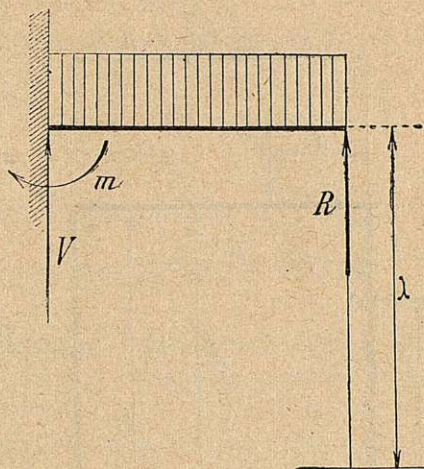


Fig. 10.

Si el apeo es completamente rígido, $\frac{\lambda}{E's} = 0$, y se recae en el valor conocido $R = \frac{3}{8} pl$.

La flecha del extremo resulta finalmente el recorrido cambiado de signo ó: $\frac{pl^4}{8EI} - \frac{Rl^3}{3EI}$, suma algebraica de las correspondientes á las acciones exteriores $\int_0^1 pdx$ y R , cuyos sentidos son contrarios, ó bien:

$$\begin{aligned} \frac{pl^4}{8EI} \left\{ 1 - \frac{l^3}{3EI \left(\frac{\lambda}{E's} + \frac{l^3}{3EI} \right)} \right\} &= \\ &= \frac{pl^4}{8EI} \times \frac{1}{1 + \frac{E's l^3}{3EI\lambda}} \end{aligned}$$

Conocido R , lo son también V y m .

Ejemplo quinto.

Sea (fig. 11) un pórtico, formado por dos pilares, de alturas, p , π , desiguales, rígidamente unidos por una viga, que salva el vano v . Los pilares están cimentados por medio de basas, que por su gran superficie resultan prácticamente equivalentes á empo-
tramientos.

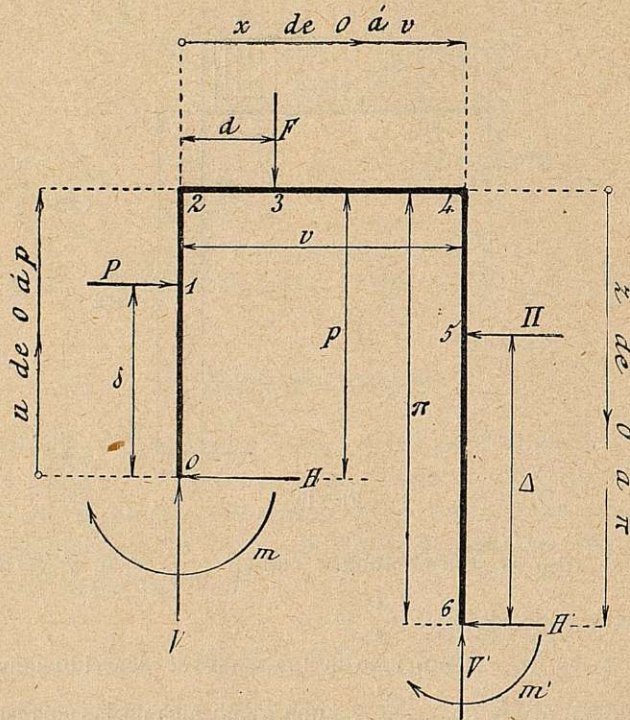


Fig. 11.

Directamente, ó por el intermedio de forjados que ligen dos pórticos, pueden sufrir éstos acciones aisladas, ó repartidas, verticales, horizontales, ó ambas á un tiempo, y además variaciones de volumen.

La construcción es tres veces indeterminada. Sean variables independientes las tres reacciones V , H , m del pilar izquierdo. La Estática determina en función de éstas, las otras tres.

El momento de inercia, igual para los dos pilares, es I_p y el de la viga I_v . La relación $I_p : I_v = r$. El trabajo de flexión es predominante, y en un primer cálculo prescindimos de los efectos de fuerzas normales y tangenciales.

La variable fundamental, l , longitud del eje de la pieza poligonal, la sustituiremos por claridad: en el pilar p por u ; en el π por z y en la viga por x .

Consideremos primero una sola acción horizontal P en el punto 1, á δ por cima del origen 0.

Los valores sucesivos de M , momento flector, son:

$$\begin{aligned} M_0^1 &= m + Hu & u \text{ de } 0 \text{ á } \delta \\ M_1^2 &= m + Hu - Pu + P\delta & u \text{ de } \delta \text{ á } p \\ M_2^4 &= m + Hp - Pp + P\delta + Vx & x \text{ de } 0 \text{ á } v \\ M_4^6 &= m + Hp - Hz - Pp + P\delta + Pz + Vv & z \text{ de } 0 \text{ á } \pi \end{aligned}$$

Todas las derivadas parciales respecto á m son 1.

Multiplicando por El_p todos los términos de la expresión (39) resultan afectados por $r = I_p : I_v$ los relativos á la viga.

Como ya hemos observado (ejemplo segundo), es indiferente contar l desde 0 á 6 ó desde 6 á 0, puesto que los recorridos de m y de m' son nulos. Escribiendo la nulidad del correspondiente á m , contando como hasta ahora en el sentido 0, δ , 1 6, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\delta M_0^1 \times 1 \times du + \int_\delta^p M_1^2 \times 1 \times du + \\ &+ r \int_0^v M_2^4 \times 1 \times dx + \int_0^\pi M_4^6 \times 1 \times dz \quad ; \\ 0 &= \left\{ mp + H \frac{p^2}{2} - P \frac{p^2}{2} + P \frac{\delta^2}{2} + P \delta p - P \delta^2 \right\} + \\ &+ r \left\{ mv + Hpv - Ppv + P \delta v + V \frac{v^2}{2} \right\} + \\ &+ \left\{ m\pi + Hp\pi - H \frac{\pi^2}{2} + Vv\pi + P \frac{\pi^2}{2} - Pp\pi + P \delta \pi \right\} = 0 \end{aligned}$$



que se reduce á:

$$\begin{aligned} & m \left\{ p + \pi + rv \right\} + H \left\{ \frac{p^2}{2} + p - \pi \frac{\pi^2}{2} + rpv \right\} + \\ & \quad + V \left\{ \pi v + r \frac{v^2}{2} \right\} = \\ & = P \left\{ \frac{p^2}{2} - p\delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + p\pi - \pi\delta + rvp - rv\delta \right\} \quad (1\text{ h}) \end{aligned}$$

Si la acción aislada P se hace una infinitesimal, $e \propto d(\delta)$ y la distancia δ varía desde cero hasta p , integrando (1 h) se obtendrá la ecuación correlativa con un empuje e kg.: m. l. que puede ser uniforme ($e = \text{constante}$) ó variable con la altura ($e = f(\delta)$).

Observemos que el primer miembro es independiente de la variable δ y en nada se altera.

Los coeficientes de m , H , V , son funciones exclusivas de las dimensiones p , π , v y de la relación de momentos de inercia, r . Llamando para abreviar (I, m) á la primera ecuación, derivada respecto á m , resulta

$$(I, m) = ep \times \left\{ \frac{p^2}{6} + \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi^2}{2} + rv \frac{p}{2} \right\} \quad (1'\text{ h})$$

cuando e es constante (acción del viento), y si $e = e_0 \frac{p - \delta}{p}$ (empuje de tierras ó de líquidos)

$$(I, m) = e_0 p \left\{ \frac{p^2}{8} + \frac{p\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4} + rv \frac{p}{3} \right\} \quad (1''\text{ h})$$

Análogamente, anulando el recorrido de H' , las derivadas parciales son: u , de 0 á p ; p , de 0 á v ; $(p - z)$, de 0 á π . Hechas las integraciones y ordenando, resulta:

$$\begin{aligned} & m \left\{ \frac{p^2}{2} + p\pi - \frac{\pi^2}{2} + rpv \right\} + \\ & + H \left\{ \frac{p^3}{3} + p^2\pi - p\pi^2 + \frac{\pi^3}{3} + rp^2v \right\} + \\ & + V \left\{ p\pi v - \pi^2 \frac{v}{2} + rp \frac{v^2}{2} \right\} = \\ & = P \left\{ \frac{p^3}{3} + p^2\pi - p\pi^2 + \frac{\pi^3}{3} - p\pi\delta - p^2 \frac{\delta}{2} + \pi^2 \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^3}{6} + \right. \\ & \quad \left. + p^2v - rpv\delta \right\} \quad (2\text{ h}) \end{aligned}$$



Análogamente para el empuje uniforme, el primer miembro (II, H) no varía y resultan:

$$(II, H) = ep \times \left\{ \frac{1}{8} p^3 + \frac{1}{2} p^2 \pi - \frac{3}{4} p \pi^2 + \frac{\pi^3}{3} + rv \frac{p^2}{2} \right\} \quad (2'h)$$

$$(II, H) = e_0 p \left\{ \frac{11}{120} p^3 + \frac{1}{3} p^2 \pi - \frac{5}{12} p \pi^2 + \frac{1}{6} \pi^3 + \right. \\ \left. + rv \frac{p^2}{3} \right\} \quad (2''h)$$

Y la nulidad del recorrido de V' , para las derivadas parciales: 0 de 0 á p ; x de 0 á v ; v de 0 á π , conduce á:

$$m \left\{ r \frac{v^2}{2} + \pi v \right\} + H \left\{ rp \frac{v^2}{2} + p \pi v - \pi^2 \frac{v}{2} \right\} + \\ + V \left\{ r \frac{v^3}{3} + \pi v^2 \right\} = \\ = P \left\{ p \pi v - \pi v \delta - \pi^2 \frac{v}{2} + rp \frac{v^2}{2} - rv^2 \frac{\delta}{2} \right\} \quad (3, h)$$

y para el empuje uniforme á:

$$(III, V) = ep \left\{ \frac{p \pi v}{2} - \frac{\pi^2 v}{2} + r \frac{v^2 p}{4} \right\} \quad (3', h)$$

y para el empuje creciente á:

$$(III, V) = e_0 p \left\{ \frac{p \pi v}{3} - \frac{\pi^2 v}{4} + r \frac{v^2 p}{6} \right\} \quad (3'', h)$$

Considerando una fuerza vertical F aislada, á la distancia d del punto 2, los valores de M son:

$$M_0^2 = m + Hu \quad u \text{ de } 0 \text{ á } p$$

$$M_2^5 = m + Hp + Vx \quad x \text{ de } 0 \text{ á } d$$

$$M_4^4 = m + Hp + Vx - Fx + Fd \quad x \text{ de } d \text{ á } v$$

$$M_4^6 = m + Hp - Hz + Vv - Fv + Fd \quad z \text{ de } 0 \text{ á } \pi$$

Igualando á cero el recorrido de m' se obtiene como primer miembro el mismo (I, m') lo que era fácil de prever, dada su signi-

ficación. Lo mismo sucede con las ecuaciones relativas á los recorridos de H' y V' .

$$(I, m) = F \left\{ \pi v - \pi d + \frac{r}{2} v^2 - rvd + \frac{r}{2} d^2 \right\} \quad (1 \text{ v})$$

Para una carga uniforme, $c \text{ kg:m.l.}$, haciendo $F = c \times d(d)$ é integrando respecto á d :

$$(I, m) = cv^2 \left\{ \frac{\pi}{2} + r \frac{v}{6} \right\} \quad (1' \text{ v})$$

Y del mismo modo:

$$(II, H) = F \left\{ p \pi v - p \pi d - \pi^2 \frac{v}{2} + \pi^2 \frac{d}{2} + \right. \\ \left. + rp \frac{v^2}{2} - rpv d + rp \frac{d^2}{2} \right\} \quad (2 \text{ v})$$

$$(II, H) = c v^2 \left\{ r \frac{pv}{6} + \frac{p \pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} \right\} \quad (2' \text{ v})$$

$$(III, V) = F \left\{ \pi v^2 - \pi v d + r \frac{v^3}{3} - r \frac{v^2 d}{2} + r \frac{d^3}{6} \right\} \quad (3 \text{ v})$$

$$(III, V) = cv^2 \left\{ \frac{\pi v}{2} + r \frac{v^2}{8} \right\} \quad (3' \text{ v})$$

Si queremos considerar una fuerza Π sobre el pilar π , además de la P sobre el p (fig. 11), las expresiones de los momentos, desde 0 á 4 no cambian. Entre 4 y 5 subsiste la anterior de M_4^6 y entre 5 y 6 se le agregan los términos $+\Pi \pi$, $-\Pi \Delta$, $-\Pi z$, que producen, al integrar desde $z = \pi - \Delta$ hasta $z = \pi$ los siguientes términos en los segundos miembros:

$$\text{En } (I, m) \quad + \frac{\Pi}{2} \Delta^2$$

$$\text{En } (II, H) \quad + \frac{\Pi}{2} \left\{ p \Delta^2 - \pi \Delta^2 + \frac{5}{3} \Delta^3 \right\}$$

$$\text{En } (III, V) \quad + \frac{\Pi}{2} v \Delta^2$$



Cuando las alturas son iguales, $p = \pi$, todo se simplifica, resultando los primeros miembros:

$$\begin{aligned}(I', m) &= m \left\{ 2p + rv \right\} + H \left\{ p^2 + rpv \right\} + V \left\{ pv + r \frac{v^2}{2} \right\} \\(II', H) &= m \left\{ p^2 + rpv \right\} + H \left\{ \frac{2}{3} p^3 + rp^2 v \right\} + V \left\{ \frac{pv^2 + rpv^2}{2} \right\} \\(III', V) &= m \left\{ pv + r \frac{v^2}{2} \right\} + H \left\{ \frac{p^2 v + rpv^2}{2} \right\} + V \left\{ pv^2 + r \frac{v^3}{3} \right\}\end{aligned}$$

Los segundos para $P = \Pi$, $\delta = \Delta$ se convierten en:

$$\begin{aligned}(I) \quad P &\left\{ p^2 - 2p\delta + \delta^2 + rvp - v\delta \right\} \\(II) \quad P &\left\{ \frac{2}{3} p^3 - p^2\delta + \delta^3 + rp^2 v - rpv\delta \right\} \\(III) \quad P &\left\{ p^2 \frac{v}{2} - pv\delta + v\delta^2 + rp \frac{v^2}{2} - rv^2 \frac{\delta}{2} \right\}\end{aligned}$$

Con empuje unilateral resulta:

$$\begin{aligned}ep \left\{ \frac{1}{6} p^2 + \frac{1}{2} rpv \right\} &(1^{III} h) ; e_o p \left\{ \frac{5}{24} p^2 + \frac{1}{3} rpv \right\} \quad (1^{IV} h) \\ep \left\{ \frac{5}{24} p^3 + \frac{1}{2} rp^2 v \right\} &(2^{III} h) ; e_o p \left\{ \frac{7}{40} p^3 + \frac{1}{3} rp^2 v \right\} \quad (2^{IV} h) \\ep \left\{ \frac{1}{4} rpv^2 \right\} &(3^{III} h) ; e_o p \left\{ \frac{1}{12} p^2 v + \frac{1}{6} rpv^2 \right\} \quad (3^{IV} h)\end{aligned}$$

Y si en lugar de las fuerzas aisladas P obran simétricamente un empuje unitario uniforme, e , ó uno variable desde 0 hasta e_o resultan:

$$\begin{aligned}ep \left\{ \frac{1}{2} rvp + \frac{1}{3} p^2 \right\} &(1^V h) ; e_o p \left\{ \frac{1}{3} rvp + \frac{1}{4} p^2 \right\} \quad (1^{VI} h) \\ep \left\{ \frac{1}{2} rvp^2 + \frac{5}{12} p^3 \right\} &(2^V h) ; e_o p \left\{ \frac{1}{3} rvp^2 + \frac{13}{60} p^3 \right\} \quad (2^{VI} h) \\ep \left\{ \frac{1}{4} rv^2 p + \frac{1}{6} vp^2 \right\} &(3^V h) ; e_o p \left\{ \frac{1}{6} rv^2 p + \frac{1}{8} vp^2 \right\} \quad (3^{VI} h)\end{aligned}$$

Como ejemplo concreto, supongamos $p = \pi = v$ y $r = 1$, es decir, las mismas longitudes y momentos de inercia en los tres elementos del pórtico.

Resultan, simplificadas, las ecuaciones siguientes, relativas á una sobrecarga uniforme, c , sobre la viga v :

$$\left. \begin{aligned} 3m + 2vH + \frac{3}{2}vV &= \frac{2}{3}cv^2 \\ 2m + \frac{5}{3}vH + vV &= \frac{5}{12}cv^2 \\ \frac{3}{2}m + vH + \frac{4}{3}vV &= \frac{5}{8}cv^2 \end{aligned} \right\}$$

$$m = + \left(\frac{1}{36} = 0,0277 \right) cv^2$$

$$H = - \left(\frac{1}{12} = 0,0833 \right) cv$$

$$V = + \left(\frac{1}{2} = 0,5000 \right) cv$$

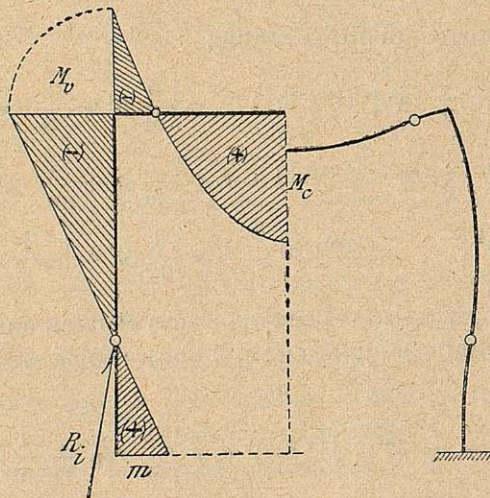


Fig. 12.

De estos valores se deducen: la altura del punto de inflexión i , en cada pilar (fig. 12).

$$Hi + m = 0 ; i = - \frac{m}{H} = + \frac{1}{3} v$$

y los valores de los momentos flectores en el vértice y en el centro del vano:

$$M_v = m - Hv = - \left(\frac{1}{18} = 0,0556 \right) cv^2 ; M_c = M_v + \frac{cv^2}{8} = + \left(\frac{5}{9 \times 8} = 0,0694 \right) cv^2$$

que determinan por completo la distribución de flexiones y permiten formarse idea de la figura del pórtico deformado, como, con enorme exageración, representamos.

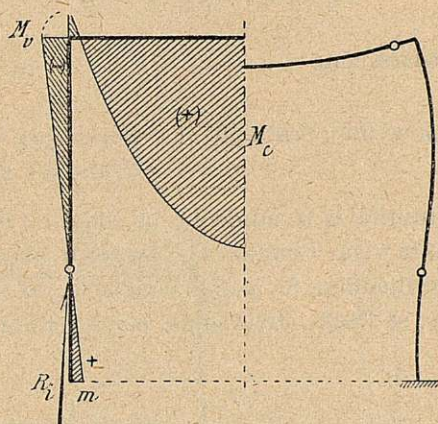


Fig. 13.

Si, como ocurre en la práctica, los pilares son menos rígidos que la viga, y, por ejemplo,

$$r = \frac{I_p}{I_v} = \frac{1}{10},$$

resulta (fig. 13):

$$\frac{21}{20} m + \frac{11}{10} vH + \frac{21}{20} vV = \frac{31}{60} cv^2$$

$$\frac{11}{10} m + \frac{23}{30} vH + \frac{11}{20} vV = \frac{8}{30} cv^2$$

$$\frac{21}{20} m + \frac{11}{20} vH + \frac{31}{30} vV = \frac{41}{80} cv^2$$

$$m = + 0,006.858 cv^2 ; H = - 0,020.970 cv$$

$$i = + 0,329 v ; M_v = - 0,014 cv^2 ; M_c = + 0,111 cv^2$$

A medida que aumenta la rigidez de la viga su trabajo se aproxima al correspondiente al simple apoyo y el de los pilares se hace cada vez más pequeño. En el límite, para $r = 0$, resulta el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2m + vH + vV &= \frac{1}{2} cv^2 \\ m + \frac{2}{3} vH + \frac{1}{2} vV &= \frac{1}{4} cv^2 \\ m + \frac{1}{2} vH + vV &= \frac{1}{2} cv^2 \end{aligned} \right\}$$

que sólo se satisface con:

$$m = 0 \quad ; \quad H = 0 \quad ; \quad V = \frac{1}{2} cv$$

Lo mismo resulta si se aumenta la longitud de los pilares respecto á la de la viga. Cuanto más largos ó más débiles, menor flexión experimentan. Si, por lo contrario, su rigidez se hace cada vez mayor, se llega, dividiendo por r y llevando al límite, á:

$$\left. \begin{aligned} m + vH + \frac{1}{2} vV &= \frac{1}{6} cv^2 \\ m + vH + \frac{1}{2} vV &= \frac{1}{6} cv^2 \\ \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} vH + \frac{1}{3} vV &= \frac{1}{8} cv^2 \end{aligned} \right\}$$

$$m = -\frac{1}{12} cv^2 \quad ; \quad H = 0 \quad ; \quad V = \frac{1}{2} cv;$$

que corresponden, como deben, á la viga perfectamente empotrada en dos macizos absolutamente rígidos.

Cualquier caso de coexistencia de cargas verticales, horizontales, uniformes, variables, etc., se estudia con la misma sencillez, por separado, ó en total, igualando los primeros miembros de siempre á los respectivos segundos ó á sus sumas. Por ejemplo, una presión unilateral del viento, que supondremos $e = \frac{c}{4}$ kg. : m. l., produce, por sí sola (fig. 14):

$$3 m + 2 v H + \frac{3}{2} v V = c v^2 \left\{ \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \right\}$$

$$2 m + \frac{5}{3} v H + v V = c v^2 \left\{ \frac{17}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{96} \right\}$$

$$\frac{3}{2} m + v H + \frac{4}{3} v V = c v^2 \left\{ \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \right\}$$

$$m = - \left(\frac{59}{1008} = 0,058 \right) c v^2 ; H = + \left(\frac{19}{96} = 0,198 \right) c v ;$$

$$V = - \left(\frac{1}{28} = 0,036 \right) c v$$

$$m + H i - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} c i^2 = 0 ; i = + \left\{ \begin{array}{l} 0,298 \\ 1,192 \end{array} \right\} v$$

Hay dos puntos de inflexión, uno real y otro virtual en la prolongación del pilar de barlovento.

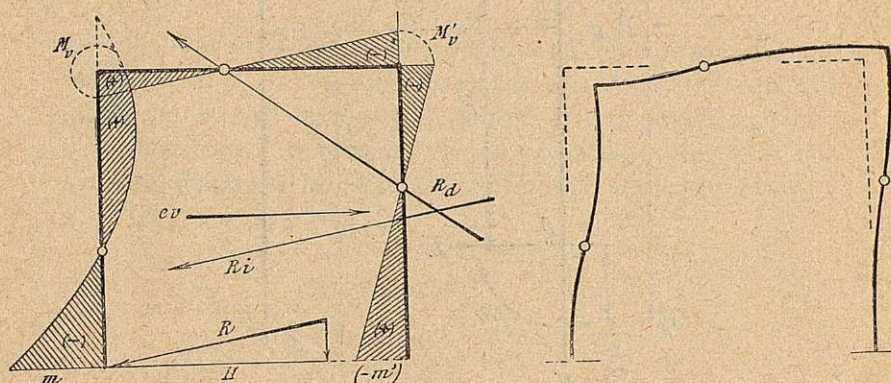


Fig. 14.

En la figura representamos los momentos flectores: el correspondiente al extremo del pilar derecho es igual y opuesto al de empotramiento; $m'_f = -m'$.

$$M_v = m + H v - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} c v^2 = + 0,015 c v^2$$

$$M'_v = M_v - V v = - 0,021 c v^2$$

$$m'_f = -m' = m + \frac{1}{8} c v^2 - V v = + 0,031 c v^2$$

La viga y el pilar de sotavento tienen también inflexión. Por ellos pasa la reacción total de la derecha, como es fácil comprobar calculando las componentes H' , V' y el par m' .

Figuramos las deformaciones del pórtico en escala, como siempre, muy exagerada.

Ejemplo sexto.

Trabajo del pórtico por efecto de variaciones de longitud de sus elementos:

El pilar de la derecha (fig. 15), sufre un alargamiento unita-

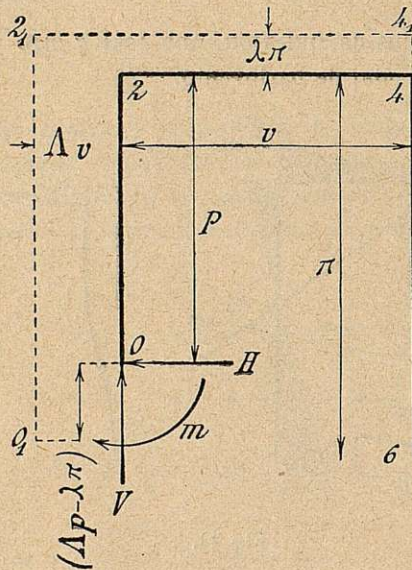


Fig. 15.

rio, λ ; la viga y el pilar izquierdo experimentan otro, Λ . En el ejemplo concreto, equivaldrá esto á suponer que el sol hiera á 45° los elementos p , v , provocando $\Lambda = 0,000.300$ y que π queda en sombra y sufre $\lambda = 0,000.150$. Corresponden esas variaciones á 30° y á 15° .

El pórtico, empotrado en 6 y libre para dilatarse, tomaría la forma 0, 2, 4, 6. Las reacciones incógnitas son las que llevarían

el punto 0_1 á 0 y mantendrían el paralelismo inicial del arranque del pilar p . Los recorridos μ , h , v de m , H , v , son tales, que sumados con los debidos á las variaciones lineales, que respectivamente son: 0 , $+\Lambda v$ (porque *con cuerda* con el sentido atribuído á H) y $-(\Lambda p - \lambda \pi)$, (porque *discuerda* con el de V) dan cero.

$$\mu = 0 \quad ; \quad h + \Lambda v = 0 \quad ; \quad v - \{ \Lambda p - \lambda \pi \} = 0$$

Las expresiones de M_0^2 , M_2^4 , M_4^6 son:

$$M_0^2 = m + Hu \quad (\text{de } 0 \text{ á } p)$$

$$M_2^4 = m + Hp + Vx \quad (\text{de } 0 \text{ á } v)$$

$$M_4^6 = m + Hp - Hz + Vv \quad (\text{de } 0 \text{ á } \pi)$$

que sólo difieren de las ya conocidas en no contener más que términos en m , H , V . Las ecuaciones que se obtengan tienen, por tanto, los *mismos* primeros miembros de siempre. Recordemos que están todos multiplicados por el factor EI_p , que tiene que aparecer ahora en los segundos miembros, multiplicando á 0 , á $-\Lambda v$ y á $+(\Lambda p - \lambda \mu)$.

$$(I, m) = 0$$

$$(II, H) = -EI_p \times \Lambda v$$

$$(III, V) = +EI_p \{ \Lambda p - \lambda \pi \}$$

La homogeneidad es patente, pues (II) y (III) son de la dimensión fuerza \times (línea)³, lo mismo que los segundos miembros, fuerza $\times \frac{(\text{línea})^{(4+1)}}{(\text{línea})^2}$; (I) es del orden fuerza \times (línea)², es decir del de EI_p , anulado por ser nulo el giro μ .

Apliquemos esto al pórtico equilátero $p = \pi = v$, $r = 1$. Supongamos (unidades kilo y metro) I_p igual á lo necesario para resistir en buenas condiciones el máximo momento de la carga uniforme c (kg. : m. l.) que es $0,0694 c v^2$, que para $v = 10$ m. vale $6,94 c$ ó mejor $7 c$. La sección de la viga puede ser de $0,80$ m. de



altura y para que la carga máxima sea de 40 kg. : cm² ó 40 × 10⁴ kg. : m², en el hormigón armado (*) de que suponemos hecho el pórtico:

$$7 c = 40 \times 10^4 \times \frac{I_p}{0,40} ; I_p = 0,000.007 \times c (m^4)$$

Tomemos $E = 200.000$ kg. : cm² ó 2×10^9 kg. : m²; $EI_p = 14.000 c$; $EI_p \times \Delta = 4,2 c$ y $EI_p (\Delta - \lambda) = 2,1 c$. Resulta, dividiendo por v la primera ecuación y por v^2 la segunda y tercera, para que todas queden de las mismas dimensiones (fuerza × línea):

$$\left. \begin{aligned} 3 m + 2 v H + \frac{3}{2} v V &= 0 \\ 2 m + \frac{5}{3} v H + v V &= -EI_p \times \frac{\Delta v}{v^2} = -4,2 \frac{c}{v} \\ \frac{3}{2} m + v H + \frac{4}{3} v V &= +EI_p \times \frac{(\Delta - \lambda) v}{v^2} = +2,1 \frac{c}{v} \end{aligned} \right\}$$

$$m = -0,8 \frac{c}{v} ; H = -4,2 \frac{c}{v^2} ; V = +7,2 \frac{c}{v^2}$$

Nótese que los coeficientes numéricos involucran las dimensiones de EI_p (fuerza × (línea)²): los resultados son, como debben, homogéneos; m es un momento; H , V son fuerzas.

Hay una inflexión virtual (fig. 16) por bajo del punto 0:

$$m + Hi = 0 ; i = \frac{+0,8}{-4,2} v = -0,19 v$$

y otra inflexión en la viga, por ser:

$$\begin{aligned} M_v &= m + Hv = -5,0 \frac{c}{v} \\ M'_v &= m + Hv = Vv = +2,2 \frac{c}{v} \\ m'_f &= -m' = m + Vv = +6,4 \frac{c}{v} \end{aligned}$$

Para que los resultados sean comparables con los debidos á las cargas ordinarias, suponemos $c = 2.000$ kg. : m. l. y $v = 10$ m.

(*) El momento de inercia y la sección son los del sólido virtual homogéneo, equivalente al real heterogéneo.



El máximo producido por c (fig. 12) es $M_c = + 0,0694 cv^2 = 14.000 \text{ m.-kg.}$ en números redondos. El máximo debido á las dilataciones supuestas (las más usuales) sube á $6,4 \frac{c}{v} = 1280 \text{ m.-kg.} = (-m')$, que está representado en la fig. 16 en una escala diez veces mayor que la de las figuras 12 y 14 (*).

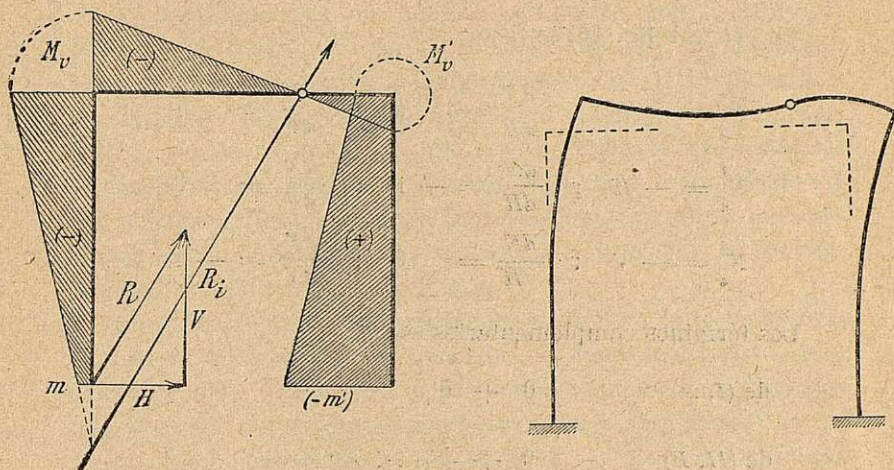


Fig. 16.

El efecto de la sustentación izquierda, al mantener invariables, á pesar de las dilataciones, dirección y lugar del extremo del pórtico, es el mismo que produciría juntamente con aquéllas una fuerza exterior, la reacción R_i (fig. 16) si dicho extremo estuviera libre. Los elementos p y v quedan comprimidos, aquél por V , éste por H y π queda estirado por V . Los tres trabajan por flexión compuesta.

En el cálculo no han intervenido las fuerzas normales. Veamos su influencia. A los primeros miembros de siempre, que son los valores de

$$EI_p \times \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dR} dl = \frac{I_p}{I} \times \int M \frac{dM}{dR} dl$$

(*) Por equivocación al trazar la figura aparecen cambiadas las curvaturas en la viga; el buen criterio del lector corregirá nuestro error, demasiado tarde advertido.

(excluidos los términos relativos á acciones directas, que ahora no existen), les faltan los relativos á las N , afectados también por el multiplicador EI_p :

$$EI_p \times \int \frac{N}{ES} \frac{dN}{dR} dl = \frac{I_p}{S} \times \int N \frac{dN}{dR} dl$$

En general (fig. 16) se tiene:

$$\begin{aligned} N_0^2 &= V ; \quad \frac{dN}{dH} = 0 ; \quad \frac{dN}{dV} = 1 \\ N_2^4 &= -H ; \quad \frac{dN}{dH} = -1 ; \quad \frac{dN}{dV} = 0 \\ N_4^6 &= -V ; \quad \frac{dN}{dH} = 0 ; \quad \frac{dN}{dV} = -1 \end{aligned}$$

Los términos complementarios son:

$$\begin{aligned} \text{de } (I, m) & \quad 0 + 0 + 0 \\ \text{de } (II, H) & \quad 0 + \frac{I_p}{S_v} \times Hv + 0 \\ \text{de } (III, V) & \quad \frac{I_p}{S_p} \times Vp + 0 + \frac{I_p}{S_p} \times V\pi \end{aligned}$$

Apliquémoslos al caso $p = v = \pi$, $r = 1$ y naturalmente $S_v = S_p$. Para que esta sección, con la altura supuesta de 0,80 m. dé el momento de inercia 0,000 007 c, debe valer $0,80 \times 0,000 165 c = 0,000 133 c$ y el factor $\frac{I_p}{S_p}$ es $\frac{1}{19} = 0,052$, que no es un número, sino una magnitud fuerza \times (línea)². Las ecuaciones corregidas, recordando que (II) y (III) están divididas por v^2 al simplificar, son:

$$\left. \begin{aligned} 3 m + 2 v H + \frac{3}{2} v V &= 0 \\ 2 m + \left(\frac{5}{3} v + \frac{v}{19 v^2} \right) H + v V &= -4,2 \frac{c}{v} \\ \frac{3}{2} m + v H + \left(\frac{4}{3} v + \frac{2v}{19 v^2} \right) V &= +2,1 \frac{c}{v} \end{aligned} \right\}$$

Los términos correctivos son, como se ve, de escasísima importancia en el caso estudiado. Para concretar, con los valores numéricos ya citados; $c = 2.000 \text{ kg.:m. l.}$ y $v = 10 \text{ m.}$, las diferencias son: de 0,0052 que aumenta el coeficiente de H , que en la primitiva ecuación (II) valía 16,666; de 0,0104, incremento del de V , que en la primitiva (III) era 13,333. Las discrepancias en los valores de m , H , v , son despreciables.

Pero si los pilares son cada vez más cortos, con la misma rigidez, ó más rígidos, con la misma longitud, la resistencia opuesta á las variaciones de longitud de la viga va tomando mayor importancia: la reacción H será cada vez mayor y m irá también creciendo. Si la viga, con la misma rigidez se va acortando, ó, con la misma longitud, haciendo más rígida, su oposición á las variaciones de los pilares, *nula* si las contracciones ó dilataciones *absolutas*, no unitarias, son iguales en los dos, se irá aumentando y con ella la reacción V .

En general, en las construcciones bastante ó muy peraltadas la influencia de las fuerzas normales es, como se ha visto, despreciable. Por lo contrario en las obras bastante ó muy rebajadas, ó en las que tengan elementos verticales muy rígidos, la influencia de dichas fuerzas es predominante en alto grado, *exclusiva*, á veces, con ciertas formas.

Ejemplo séptimo.

Estudiemos la acción de un choque sobre el mismo pórtico equilátero. Con los valores concretos ya conocidos, la obra está en buenas condiciones de resistencia bajo un peso de 20.000 kg., repartido por igual sobre la viga. El peso de ésta es, en números redondos, 600 kg.:m. l., ó seis toneladas cada uno de los elementos del pórtico.

Veamos de qué altura debe caer sobre el centro de v un cuerpo de una tonelada para que la obra soporte en su fibra más cargada lo mismo que bajo las 20 toneladas de peso repartido, que suponemos equivalente á 10 en el centro.

$Q = 1000 \text{ kg.}$, aplicado estáticamente da las tres ecuaciones de siempre, con los segundos miembros (1 v), (2 v), (3 v) que para $p = \pi = v$, $r = 1$, $d = \frac{v}{2}$, son:



$$3 m + 2 v H + \frac{3}{2} v V = \frac{5}{8} v \times (F = 1000)$$

$$2 m + \frac{5}{3} v H + v V = \frac{3}{8} v \times (F = 1000)$$

$$\frac{3}{2} m + v H + \frac{4}{3} v V = \frac{29}{48} v \times (F = 1000)$$

$$m = + \frac{1}{8} v F = + 1.250 \text{ m.-kg.}; H = - \frac{1}{8} F = - 125 \text{ kg.};$$

$$V = + \frac{1}{2} F = + 500 \text{ kg.}$$

Para calcular la flecha estática, q_e , formulemos la derivada parcial del trabajo respecto á la acción $F = 1000$ y para ello:

$$M_0^2 = m + H u = \left(\frac{1}{8} v - \frac{1}{8} u \right) F ; \quad \frac{dM}{dF} = \frac{1}{8} (v - u)$$

$$M_2^c = m + H v + V x = \left(\frac{1}{8} v - \frac{1}{8} v + \frac{1}{2} x \right) F ;$$

$$\frac{dM}{dF} = \frac{1}{2} x$$

$$q_e = \frac{1}{EI_p} \times \left\{ \int_0^{10} \frac{(v-u)^2}{8^2} F du + \int_0^5 \frac{x^2}{2^2} F dx \right\} =$$

$$= \frac{6,25 \times (F = 1000 \text{ kg.})}{(15 \times 10^8) \times (7 \times 10^{-6} \times 2000)} = 0,000.3 \text{ m.}$$

El coeficiente k puede considerarse racionalmente el mismo del simple apoyo, porque hay una inflexión justamente en el extremo del pilar $\left(i = - \frac{m}{H} = v \right)$ y así $k = \frac{17}{35}$.

En cuanto al valor de P , no puede ser el de todo el pórtico: 18 toneladas. Por consecuencia de la deformación, los pilares oscilan en sentido horizontal, absorbiendo, por tanto, energía; pero llega á ellos *transmitida* por la viga. Además, cuanto menor su-

pongamos P , más exageramos el coeficiente $\frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}$, de apro-

vechamiento de la energía total $Q \alpha$. Tomando $P = 6$ toneladas,



colocamos al pórtico en condiciones algo desfavorables para su resistencia. El coeficiente es entonces

$$\frac{1}{1 + \frac{17}{35} \times \frac{6}{1}} = \frac{1}{3,914} = 0,2556$$

y la solución del problema está dada por

$$\left(Q_{\epsilon} = 10.000 \text{ kg.} \right) = 1000 \text{ kg.} \times \sqrt{\frac{2\alpha}{q_e}} \times \sqrt{0,2556}$$

$$\alpha = 10^2 \times 0,000.3 \times \frac{1}{2 \times 0,2556} = 0,059 \text{ m.}$$

Parecerá, á primera vista, sumamente pequeña esa altura; la energía *total* es 59 kilográmetros, de los que solamente 15 son los que se transforman en trabajo elástico. Entre 10.000 kilos estáticos y 1.000 caídos desde 0,059 m. parece que no hay paridad alguna de efectos.

Una sencilla operación aritmética da la explicación: los 10.000 kilos estáticos producen una flecha, $10 q_e$, ó sea 0,003 m. y un trabajo gradual:

$$\frac{1}{2} \times 10.000 \times 0,003 = 15 \text{ kgm.}$$

exactamente igual al calculado bajo la acción del choque. Las construcciones muy rígidas, sobre todas ellas las de hormigón armado, sufren deformaciones tan escasas que el trabajo elástico es forzosamente pequeñísimo.

La flecha dinámica, producida por el choque de 1.000 kilos desde 0,059 metros, es, finalmente,

$$q_{\epsilon} = \sqrt{\frac{2 \times 0,059 \times 0,0003}{0,2556}} = \sqrt{0,000.123} = 0,011 \text{ m.,}$$

casi cuatro veces mayor que la flecha estática, producida por el peso de 10.000 kilos.

Recordemos á este propósito los resultados experimentales obtenidos por la Comisión francesa del hormigón armado en uno

de los palacios de la Exposición de París de 1900. Pesos hasta de 252 kilogramos (trozos de hormigón) fueron dejados caer de alturas variables hasta 13 metros, directamente sobre el centro de una viga-suelo de 9 metros de luz, unida por el forjado con otras homólogas, á derecha é izquierda, de 3 en 3 metros, originando, en el caso peor, un régimen vibratorio de 2 segundos de duración, con 15 oscilaciones y una amplitud máxima de 0,0146 m.

Como resultante práctica de dicho experimento se pretendió deducir que á igualdad de efecto (máxima deformación) entre un choque ($Q\alpha$) kilográmetros y una carga estática, Q_e , la relación valía, como promedio, *en aquellas circunstancias*:

$$p = \frac{Q_e}{Q\alpha} \text{ alrededor de } 10 \text{ (metros)}^{-1}$$

En nuestro ejemplo hemos encontrado

$$p_{1000} = \frac{Q_e = 10.000 \text{ kg.}}{(Q = 1000 \text{ kg.}) \times (0,059 \text{ m.})} = 169 \text{ (metros)}^{-1}$$

La discrepancia es enorme, como lógicamente debía esperarse. Ya hicimos notar la colosal influencia del valor de α ó de la velocidad $\sqrt{2g\alpha}$ sobre la distribución de la energía cinética total, $Q\alpha$, en las partes utilizada y perdida.

No hay comparación posible entre los efectos de caídas, unas de pocos centímetros y otras de muchos metros.

Rehagamos nuestro cálculo para $Q' = 250$ kilogramos, á los que corresponde $q'_e = 0,000.075$ m. El coeficiente de aprovechamiento vale ahora.

$$\frac{1}{1 + \frac{17}{35} \times \frac{6}{0,25}} = \frac{1}{12,65} = 0,079$$

y la altura de caída necesaria es:

$$\alpha' = \frac{(10.000)^2}{(250)^2} \times \frac{0,000.075}{2 \times 0,079} = 0,759 \text{ m.}$$



y la relación vale:

$$\rho_{250} = \frac{Q_{\varepsilon} = 10.000}{(Q' = 250) \times (0,759)} = 52,68.$$

Y, análogamente, para $Q'' = 100$ kilogramos

$$\frac{1}{1 + \frac{17}{35} \times \frac{6}{0,1}} = 0,0332 \quad ; \quad \alpha'' = 4,518 \text{ m.}$$

$$\rho_{100} = \frac{Q_{\varepsilon} = 10.000}{(Q'' = 100) \times 4,518} = 22,13.$$

Como se ve, á medida que el peso chocante es menor, la relación de equivalencia, ρ , entre el peso estático y el trabajo Q_{α} , va siendo cada vez menor. Se comprende bien que la Comisión francesa, operando con alturas hasta de 13 metros (*), haya obtenido el valor 10, tanto más, cuanto que la masa de la construcción era mucho mayor relativamente á la del peso chocante que en nuestro caso. La viga era allí una entre otras muchas iguales, espaciadas 3 metros entre ejes, ligadas todas por un forjado: aun suponiendo este cortado en los ejes de entrepaños, á la viga correspondían 1.100 kilogramos de peso por metro de longitud.

Por efecto de la solidaridad, la zona interesada abarcaba mucho más de los 3 metros, estrictamente atribuidos á una viga; la experimentación lo manifestó bien claro. Y con el aumento considerable de $\frac{P}{Q}$, ρ tiene que decrecer mucho.

La relación $\frac{Q_{\varepsilon}}{Q_{\alpha}}$ no puede, racional, ni experimentalmente, tener un valor *determinado* sino para *determinadas condiciones* $\left(\alpha, \frac{P}{Q}\right)$ de las que es función.

(*) Corresponde á esa altura una velocidad de 16 metros por segundo, que produce lesiones locales muy importantes, con absorción de una considerable parte de la energía cinética.

Ejemplo octavo.

Sea (fig. 17a) la sección de un tubo vertical, rectangular, de lados $2p$ y $2v$.

En el sentido normal al plano de la figura los espesores van generalmente variando por retallos ó de un modo gradual y con ellos los momentos de inercia verticales, cuyos valores, constantes en la zona de un retallo (ó los *medios* en una rebanada de poca altura) llamaremos I_p é $I_v = r I_p$

Tratamos de estudiar en una chimenea, ó un depósito de agua, ó un silo, el efecto de la diferencia de temperaturas, ó de presiones, exterior é interior.

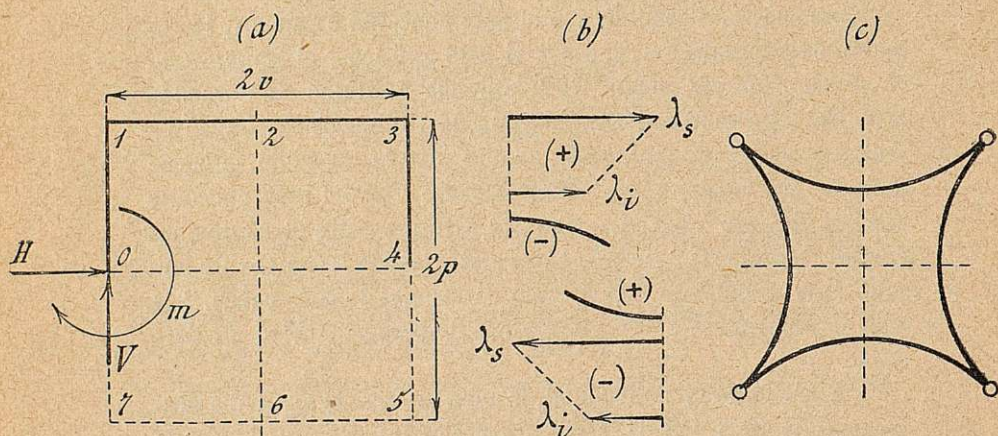


Fig. 17.

Sean, en general, λ_s y λ_i las variaciones unitarias de longitud que una causa exterior, si las reacciones y el mutuo enlace no lo coartaran, produciría en los paramentos exterior é interior. Las contaremos positivamente si son dilataciones y viceversa.

Prescindiendo por ahora de los efectos que se originan en sentido vertical, que después estudiaremos, una rebanada cualquiera, supuesta por el momento sin continuidad alguna con las adyacentes inferior y superior, sufre una variación de longitud uniforme, λ_o , en su fibra neutra, y que se opera en completa libertad y no ocasiona deformación relativa alguna. *Tiende á sufrir,*

además, una serie de variaciones, diferentes para cada fibra, desde $(\lambda_s - \lambda_o)$ en las exteriores hasta $(\lambda_i - \lambda_o)$ en las interiores, aquélla del mismo signo de λ_s y la otra $(\lambda_i - \lambda_o) = -(\lambda_o - \lambda_i)$ de signo contrario. Cada pared *tiende* á encorvarse, presentando la concavidad del lado del λ de menor valor relativo (fig. 17 b), es decir, del de *menores* dilataciones ó del de *mayores* contracciones.

La deformación del conjunto, caso de existir articulaciones en los vértices (fig. 17 c), se operaría sin traba alguna, tomando cada lado la curvatura correspondiente á un ángulo de continuidad elemental

$$\frac{(\lambda_s - \lambda_i) dl}{e}$$

constante ó variable de un punto á otro, según fuera constante ó variable $(\lambda_s - \lambda_i) = \Delta$.

La curvatura (fig. 17 b) se considera de costumbre como negativa cuando la concavidad está del lado de las fibras inferiores y viceversa, es decir, se le atribuye un signo contrario al de la diferencia $(\lambda_s - \lambda_i)$, sean estas positivas ó negativas.

Si los ángulos son rígidos, es decir, si las paredes están mutuamente empotradas por continuidad y $(\lambda_s - \lambda_i)$ es constante y uno mismo el momento de inercia en todo el contorno, no hay más deformación posible que la correspondiente á la variación unitaria, λ_o , de la fibra neutra. En cualquier sección, la fibra superior está *forzada* á sufrir una variación $(\lambda_o - \lambda_s)$, igual y de signo contrario á la diferencia $(\lambda_s - \lambda_o)$; análogamente, la fibra inferior está obligada á soportar $(\lambda_o - \lambda_i)$ igual y de opuesto signo á $(\lambda_i - \lambda_o)$. Cualesquiera que sean λ_s y λ_i las variaciones de la fibra superior, y, más en general, de todas las por encima de la neutra, son de signo contrario al correspondiente en las fibras inferiores á la misma. En la sección se desarrollan los mismos efectos que *produciría un momento antagonista*, un par flector tal que impusiera á cada fibra una variación $-(\lambda - \lambda_o)$.

Un momento positivo produce una curvatura *positiva*, medida por el ángulo

$$+ \frac{M}{EI} dl$$



Una diferencia positiva de variaciones, $(\lambda_s - \lambda_i)$ *tiende á* originar una curvatura negativa, medida por

$$- \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl$$

El momento antagonista, el que impide la deformación de la pieza, está dado por

$$+ \frac{M^a}{EI} dl - \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl = 0; M^a = \frac{EI (\lambda_s - \lambda_i)}{e} = \frac{EI \Delta}{e}$$

con el mismo signo de Δ . Si ésta es positiva tiende á producirse (fig. 17 b) una curvatura negativa; para que no se produzca, el par antagonista debe ser positivo, como Δ . Y viceversa.

Así pues, en las condiciones supuestas, si Δ es constante, *constante es el momento* $\frac{EI \Delta}{e}$ que virtualmente soportan todas

las secciones, y á él se reducen todas las reacciones provocadas por el desequilibrio de temperaturas ó de estados higrométricos.

Fácil es, por otra parte, asegurarse de esto, que á primera vista parece paradójico: se tiende á creer que las paredes se deforman, bombeándose del lado de las mayores dilataciones ó viceversa.

Supongamos que en la sección 0 (fig. 17 a) se originan las tres reacciones m , H , V , cuando la causa externa *tiende á* producir en cada punto una curvatura $-\frac{(\lambda_s - \lambda_i)}{e} dl$, lo mismo que si actuara un momento $-\frac{EI (\lambda_s - \lambda_i)}{e} = -M^a$.

Las expresiones del momento flector con un punto cualquiera son:

$$M_0^1 = m - Hu - M^a$$

$$M_1^5 = m - Hp + Vx - M^a$$

$$M_3^5 = m - Hp + Hz + V \times 2v - M^a$$

Por la simetría, los momentos en 1 y en 3 deben ser iguales:

$$m - Hp - M^a = m - Hp + V \times 2v - M^a ;$$



V tiene que ser nulo. Del mismo modo deben ser iguales en 3 y en 5:

$$m - Hp + 0 - M^a = m - Hp + H \times 2p + 0 - M^a ;$$

H es nulo también. El momento flector en cualquier parte es $(m - M^a)$. La sección 0, extremo inferior del elemento (01) debe tener un recorrido nulo respecto á sí misma, considerada como extremo superior de (012 ... 670):

$$0 = \int_0^L (m - M^a) \times 1 \times dl = (m - M^a) \times L$$

llamando L la longitud total (012 ... 670). Luego $m = M^a$: el par m existe necesariamente y tiene el valor exacto del momento antagonista; su efecto en cualquier sección es anular la curvatura $-\frac{\Delta}{e} dl$ que *sin él* se produciría. Finalmente, la flexión ó la deformación son nulas en todos los puntos.

Lo mismo resulta en cualquier figura sin simetría alguna, siempre que el momento de inercia ó, mejor dicho, su relación al espesor, $\frac{I}{e}$, sea constante. Mientras la causa perturbadora sea igual para todos los puntos, iguales son sus efectos: en cada punto *tiende* á producirse una curvatura $-\frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl$, pero la continuidad del contorno engendra la reacción-par antagonista M^a , que á su vez *tiende* á producir la curvatura $\frac{EI(\lambda_s - \lambda_i)}{e} \times \frac{1}{EI} dl$, igual y opuesta á aquélla. Y no hay deformación parcial ninguna: sólo queda la general, que se opera conservándose la pieza semejante á sí misma en la relación $-\frac{1 + \lambda_o}{1}$.

Si $(\lambda_s - \lambda_i)$ ó $\frac{I}{e}$, ó los dos, varían, el problema es perfectamente factible, como en otro ejemplo veremos, y se reduce al estudio de una pieza que en cada punto donde el momento de inercia y el espesor son I, e , soporta una causa externa virtual



igual y contraria al par antagonista, es decir $M^a = -\frac{EI\Delta}{e}$.

En el sentido vertical sucede lo mismo antes expuesto mientras consideremos un trozo de pared entre otros dos: no hay deformación porque lo impide la continuidad con los adyacentes. Con estos sucede lo mismo hasta llegar á los finales, en los que las circunstancias varían radicalmente. Si están sustentados por un elemento bastante rígido para soportar el par $-\frac{EI\Delta}{e}$ ó, lo que es igual, para desarrollar sobre el primer elemento de pared la reacción-par antagonista M^a , no hay más deformación en sentido vertical que la uniforme debida á λ_0 . Tal sucede en el arranque de la pared del cimiento de una chimenea.

Si el elemento termina sin que *otro* lo sustente, le falta allí la reacción M^a y se deforma, á menos que los adyacentes en sentido horizontal le ayuden, siendo á su vez ayudados hasta llegar á unos que por sí solos puedan desarrollar las reacciones necesarias. Esto sucede en la boca de una chimenea poligonal.

Sea (fig. 18), en planta y alzado una chimenea de altura a y supongamos cortada la pared, de longitud horizontal ó ancho $2p$ y espesor e , por la unión con las dos paredes de ancho $2v$. Al estar aquélla libre se deforma tomando la curvatura constante $-\frac{\Delta}{e} da$, lo mismo que si obrara sobre ella el momento constante $-\frac{EI\Delta}{e}$ que en el arranque se encargaría de equilibrar la reacción del cimiento ó fondo.

Una carga virtud c kilogramos por unidad de superficie, ó $2pc$ por unidad de altura produce un momento constante μ si aplicada hasta una profundidad z

$$2pc \frac{z^2}{2} = \mu \quad ; \quad pc = \frac{\mu}{z^2}$$

El efecto en la pared libre es idéntico al producido por $\frac{\mu}{z^2}$, dando á μ el valor constante $-\frac{EI\Delta}{e}$

$$(pc) = -\frac{EI\Delta}{e} \times \frac{1}{z^2}$$



Si las paredes paralelas al plano de la figura desarrollan cada una en cada punto á la profundidad z reacciones horizontales

$$r = -pc = + \frac{EI\Delta}{e} \times \frac{1}{z^2} \text{ (kg. : m. l.)}$$

los bordes de la pared en estudio se mantendrán verticales, sin deformación; pero los demás elementos se deformarán como los

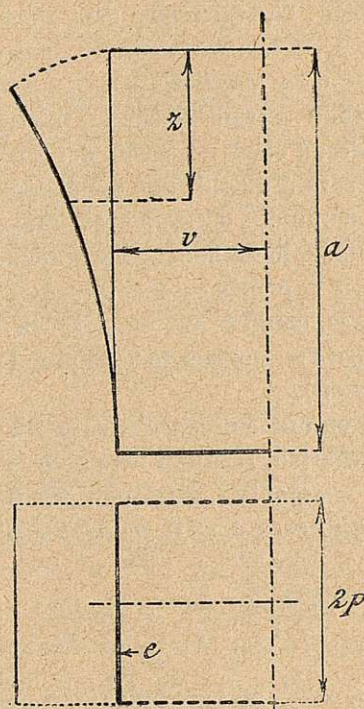


Fig. 18.

de una serie de piezas horizontales, de altura dz , anchura e , empotradas en sus extremos, salvando la luz $2p$ bajo la acción de una carga unitaria

$$q = - \frac{EI\Delta}{e} \times \frac{dz}{z^2} \times \frac{1}{2p} \text{ kg. : m. l.).}$$

Para $z = 0$, en el borde superior, q sería infinita, como era de esperar, dada la definición de esa carga, que hubiera de pro-

ducir *bruscamente* en el primer elemento una curvatura finita. La asimilación de efectos no puede llevarse hasta el límite. Lo que sí puede colegirse es que la deformación de la boca será muy sensible y que, contra lo deducido por el estudio de una rebanada horizontal *aislada*, existirá en todas ellas una deformación, del mismo género de las producidas por una carga horizontal q , pero tanto menores cuanto más cerca del cimientó se consideren (*).

A su vez, esta acción beneficiosa del cimientó produce una nueva perturbación. Las rebanadas contiguas á él debieran dilatarse libremente λ_0 , y esta variación no concuerda en general con la λ , propia de aquella parte. El efecto perturbador es todavía más sensible cuando se trata de cargas interiores, que ponen en tensión las paredes; á cierta distancia del fondo se estiran libre ó casi libremente, pero á medida que esa distancia disminuye hasta llegar á la zona de unión, donde por ser mayores las cargas debieran dilatarse más, lo impide, comprimiéndolas relativamente, la acción debida á la menor extensibilidad del fondo.

El problema es, como se ve, mucho más complejo de lo que á primera vista parece, aun siendo constante la causa de desequilibrio $\Delta = (\lambda_s - \lambda_i)$.

En resumen: en una chimenea rectangular ó poligonal, en la que $\lambda_s - \lambda_i$ es negativo, resultan los efectos siguientes:

El momento antagonista, negativo, produce horizontalmente en las fibras exteriores, á v_s de la neutra, tensiones uniformes de valor absoluto

$$\frac{EI\Delta}{e} \times \frac{v_s}{I} = E\Delta \frac{v_s}{e}$$

y compresiones $E\Delta \frac{v_i}{e}$ en las fibras interiores.

En sentido vertical, si se considera el tubo *indefinido*, prescindiendo de los efectos perturbadores, las tensiones y compresiones alcanzan esos mismos valores en los mismos lugares, salvo las pequeñas diferencias que resultan de los valores de v_s , distancia del centro de gravedad al paramento en las secciones vertical y horizontal.

(*) No hay contradicción entre las deducciones, puesto que esa deformabilidad horizontal procede precisamente de la continuidad entre una rebanada y sus inmediatas, superior é inferior, continuidad de que allí prescindimos.



La influencia del fondo ó cimientó se traduce en una carga unitaria decreciente desde un valor $E (\lambda_f - \lambda_o)$ en la unión hasta anularse prácticamente á cierta altura.

La influencia de la boca equivale á la acción de una carga interior q , decreciente con el cuadrado de la profundidad y que produce los efectos que en otro ejemplo veremos, en general tensiones horizontales en la zona central exterior y en las laterales interiores. Y, además, otras tensiones horizontales, r , uniformemente repartidas en el espesor e y decrecientes también con el cuadrado de z .

Las partes que más trabajan son, por tanto, las zonas centrales exteriores en la región más alta. Las armaduras, si se trata de hormigón armado, deben concentrarse en el exterior, no sólo por localizarse allí las tensiones, sino porque al llevar en ese sentido la fibra neutra, disminuye el valor absoluto, proporcional á v_s .

En la chimenea circular las cargas más importantes son las mismas tensiones $E \Delta \frac{v_s}{e}$, algo menores en sentido horizontal por serlo el v_s de la sección vertical (*). Los efectos perturbadores de la boca se atenúan mucho, reduciéndose á las tensiones provocadas por una presión interior virtual

$$- \frac{EI \Delta}{e} \times \frac{dz}{z^2} \times \frac{1}{2\rho} (\text{kg. : m. l.})$$

es decir, un promedio, si se reparte de un modo uniforme en las secciones resistentes $2 \times edz$, de

$$- EI \Delta \times \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{2e^2} (\text{kg. : m}^2)$$

(*) En un material homogéneo, en el que la sección vertical de un elemento es un rectángulo y la horizontal un sector de corona. En el hormigón armado, la armadura horizontal se pone ciñendo á la vertical y la diferencia entre los v se atenúa y hasta se invierte.

Ejemplo noveno.

Veamos ahora los efectos de una diferencia de presiones ó cargas uniformes, c kg. : m. l. ó $\frac{c}{a}$ kg. : m², que contaremos positivamente de fuera á dentro en la rebanada de altura a .

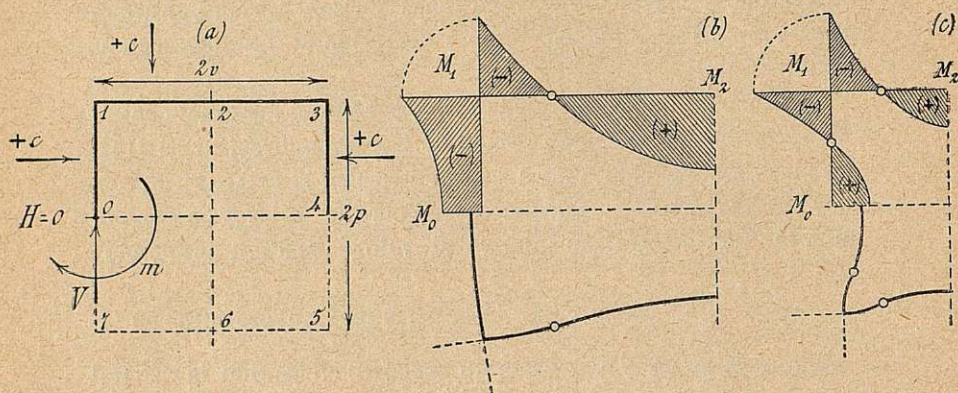


Fig. 19.

Por la simetría (fig. 19 a), en la sección 0 4 no hay reacciones tangenciales, y las normales son $V = +cv$. El momento m es la única indeterminada.

$$M_0^4 = m - c \frac{v^2}{2} \quad \text{de } 0 \text{ á } p$$

$$M_1^5 = m - c \frac{p^2}{2} + cvx - c \frac{x^2}{2} \quad \text{de } 0 \text{ á } 2v$$

$$M_3^4 = m - c \frac{p^2}{2} + cpz - c \frac{z^2}{2} \quad \text{de } 0 \text{ á } p$$

La nulidad del giro en 4, ó del momento m , da

$$m(2p + 2rv) = \frac{1}{3} cp^3 + rcp^3v - \frac{2}{3} rcv^3$$

$$M_0 = m = c \frac{p^5 + 3rp^3v - 2rv^5}{6(p + rv)}$$

y se deducen los momentos en 1 y 2.

$$M_1 = c \frac{-2p^5 - 2rv^5}{6(p+rv)} ; \quad M_2 = c \frac{-2p^5 + 3pv^2 + rv^5}{6(p+rv)}$$

Sean los que quieran p , v y r , M_1 es negativo, y todos los vértices tienden á cerrarse; si $v > p$, M_2 es positivo, y así las caras mayores tienen siempre inflexiones, que en las menores pueden desaparecer.

Para los valores $v = 2p$, $r = 1$ (fig. 19 b):

$$M_0 = -\frac{1}{2} cp^2 = -\frac{1}{8} cv^2$$

$$M_1 = -cp^2 = -\frac{1}{4} cv^2$$

$$M_2 = +cp^2 = +\frac{1}{4} cv^2$$

por donde se ve el error enorme que cometen quienes consideran cada lado empotrado en los adyacentes, cualesquiera que sean las longitudes respectivas.

Hay en el lado $2v$ inflexiones determinadas por

$$-\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + vi - \frac{1}{2}i^2 = 0; \quad i = v \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

que están á $\pm 0,707v$ del centro.

En los lados menores la flexión es toda en el mismo sentido.

En el tubo cuadrado (fig. 19 c), $p = v$, $r = 1$:

$$m_0 = m_2 = +\frac{1}{6}cp^2 ; \quad m_1 = -\frac{1}{3}cp^2$$

ó referidos á las longitudes totales, $2p$, $+\frac{1}{24}$ y $-\frac{1}{12}c(2p)^2$, es decir, lo mismo que perfectamente empotrados unos lados en otros. Las inflexiones están á

$$\pm \sqrt{\frac{2m_0}{c}} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577\right)p$$

del centro.



En un silo ó depósito, la carga interior ($-c$), que desde luego invierte todos los signos, aumenta con la altura. Las paredes trabajan por tensión ($V = -cp$), compuesta con flexión. Las deformaciones crecen rápidamente hasta llegar á una cierta profundidad en la que de un modo perceptible empieza á influir la resistencia propia del fondo si este es plano (*). Esta influencia perturba el régimen, introduciendo flexiones en planos verticales perpendiculares á las paredes, que se traducen, si no se estudia bien la disposición de las armaduras verticales, en grietas horizontales, junto al fondo en el interior y á cierta altura en el exterior.

Ejemplo décimo.

En una chimenea ó silo poligonal regular (fig. 20), de n caras de longitud $2l$ cada una, basta, por la simetría, estudiar el trozo constituido por dos semilados, entre las secciones que forman un ángulo $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Una carga uniforme interior produce:

$$M_0^1 = m + c \frac{x^2}{2}$$

$$N_0^1 = V$$

$$M_1^2 = m + c \frac{l^2}{2} + V \sin 2\alpha \times z + c \frac{z^2}{2} \quad N_1^2 = V \cos 2\alpha - cl \sin 2\alpha$$

$$\frac{dM}{dm} = 1; \quad \frac{dV}{dm} = 0 \text{ y, por tanto, la nulidad del recorrido}$$

de $m_2 = m_0$, da

$$m \times 2l + V \times \frac{l^2}{2} \sin 2\alpha = - \frac{5}{6} cl^3$$

El recorrido de V relativamente á 2 considerado fijo es fácil-

(*) Teóricamente, la influencia del fondo alcanza á toda la altura, por grande que sea.

mente calculable: es la variación del lado 0 1, proyectada sobre la dirección de 1 2, más la variación de este mismo:

$$\frac{Vl}{ES} \times \cos 2\alpha + \frac{Vl}{ES} = \frac{Vl}{ES} (1 + \cos 2\alpha)$$

y como $\frac{dN}{dV}$ vale 1 en (0 1) y $\cos 2\alpha$ en (1 2)

$$\frac{1}{ES} (Vl + Vl \times \cos^2 2\alpha - c \sin 2\alpha \cos 2\alpha l^2) = \frac{1}{ES} Vl (1 + \cos 2\alpha)$$

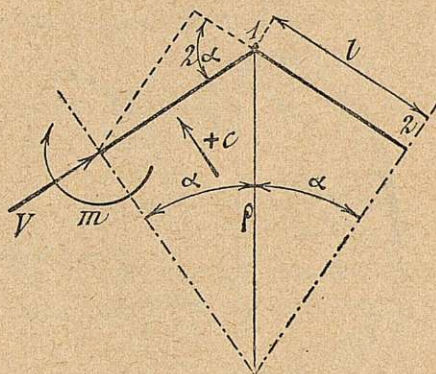


Fig. 20.

que se reduce sucesivamente á:

$$V (1 - \cos 2\alpha) = -c \sin 2\alpha$$

$$V \times 2 \sin^2 \alpha = -cl \times 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$V = -cl \cotang \alpha = -c\rho \cos \alpha$$

en función del radio $\rho = \frac{l}{\sin \alpha}$

$$m = -\frac{5}{12} cl^2 + \frac{1}{4} cl^2 \sin 2\alpha \times \cotang \alpha = cl^2 \left(-\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right)$$

$$\text{Si } \alpha = 45^\circ, \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}; m = -\frac{1}{6} cl^2, V = -cl, \text{ como}$$

ya sabíamos en la sección cuadrada. Si α disminuye, m decrece hasta anularse, y V aumenta hasta $-c\rho$ cuando el número de lados crece indefinidamente ó la sección se hace circular.



Ejemplo undécimo.

Estudiemos el efecto del sol en una torre de un faro, suponiendo que el desnivel térmico, máximo en el diámetro cuyo plano contiene al sol, decrece hasta anularse en las direcciones á escuadra, puntos de separación entre sol y sombra. La ley de variación es, racionalmente (fig. 21 a), $\delta = \delta_m \sin \alpha$. En la parte en sombra suponemos que δ es constantemente nula.

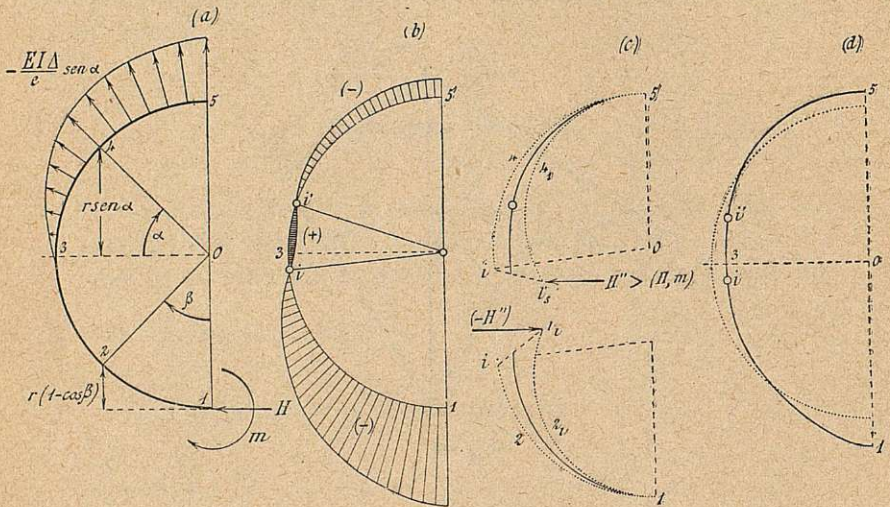


Fig. 21.

La torre se deforma simétricamente respecto al plano que contiene al sol, y, por lo tanto, no hay reacciones V contenidas en el mismo, pero sí reacciones normales H y de flexión m , de recorrido evidentemente nulo en ambas.

Del extremo supuesto libre, 1, al punto 3 no hay más causas que m y H . En la rebanada de 1 metro de altura:

$$\left. \begin{aligned} M_1^3 &= m + Hr (1 - \cos \beta) \\ N_1^3 &= H \cos \beta \end{aligned} \right\} \beta \text{ de } 0 \text{ á } \frac{\pi}{2}$$

A partir de 3 comienza á obrar en cada elemento angular $d\alpha$ una causa, equivalente por su efecto á un momento — $\frac{E \Delta I}{e}$

$\propto \sin \alpha$. Si $\Delta = \lambda_s - \lambda_i$ es, como hemos sentado, positivo, ese momento tiende á aumentar la curvatura de la torre y debemos efectivamente contarle como negativo. En el punto 4, definido por α (la subdivisión de la variable en β de 1 á 3 y α de 3 á 5 facilita el cálculo), el momento flector y fuerza normal son:

$$\left. \begin{aligned} M_5^5 &= (m + Hr) + Hr \sin \alpha - \frac{E \Delta I}{e} \sin \alpha \\ N_5^5 &= -H \sin \alpha \end{aligned} \right\} \alpha \text{ de } 0 \text{ á } \frac{\pi}{2}$$

La nulidad del recorrido de m da, prescindiendo del factor EI , y puesto que las derivadas parciales son 1 y 0:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_1^5 \times 1 \times r d\beta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_5^5 \times 1 \times r d\alpha &= 0 \\ m \times \pi + H(1 + \pi)r - \frac{E \Delta I}{e} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Haremos el cálculo con todo rigor, contando con el trabajo de las fuerzas normales, que en (a) no intervienen, por ser nulas

$$\frac{dN}{dm}.$$

$$\frac{dM}{dH} = r(1 - \cos \beta), \text{ entre 1 y 3 ; } = r(1 + \sin \alpha), \text{ entre 3 y 5}$$

$$\frac{dN}{dH} = \cos \beta \quad \text{»} \quad 1 \text{ y } 3 ; = -\sin \alpha \quad \text{»} \quad 3 \text{ y } 5$$

Multiplicando todo por EI (señalamos con tildes los valores de las derivadas parciales respecto á H):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_1^5 \times \bar{r}(1 - \cos \beta) d\beta + \frac{I}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1^5 \times \bar{\cos \beta} \times r d\beta + \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_5^5 \times \bar{r}(1 + \sin \alpha) \times r d\alpha + \\ + \frac{I}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_5^5 \times (-\bar{\sin \alpha}) \times r d\alpha = 0 \end{aligned}$$

Hechas las integraciones se reduce á:

$$m \pi + H \left\{ \pi r + \frac{I}{Sr} \frac{\pi}{4} \right\} - \frac{E \Delta I}{e} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (b)$$

Supongamos para concretar:

$$\delta = T - t = 15^\circ ; \quad \Delta = 0,000.150 ; \quad e = 0,24 \text{ (m.)} ; \\ r = 3,00 \text{ (m.)}$$

$$I = \frac{1}{12} 1,00 \times 0,24^3 = 1152 \times 10^{-8} \text{ (m}^4\text{)}; E = 2 \times 10^9 \text{ (kg. : m}^2\text{)}$$

$$\frac{E \Delta I}{e} = \frac{2 \times 10^9 \times 15 \times 10^{-8} \times 1152 \times 10^{-6}}{24 \times 10^{-2}} = 1440 \text{ (m.-kg.)}$$

$$S = 0,24 \text{ (m}^2\text{)} ; \quad \frac{I}{Sr} = 0,000.533 \text{ (m.)}$$

El término correctivo $\frac{\pi}{4} \frac{I}{Sr}$ vale 0,000.417 metros y mide la influencia de las acciones normales, mientras que $\pi r = 9,424$ metros es la de las flexiones:

Resulta así:

$$3,141 m + 12,423 H = + 1440 \text{ (m.-kg.)} \\ 3,141 m + 9,425 H = + 309 \text{ (m.-kg.)} \\ H = + 376 \text{ (kg.)} ; \quad m = - 1029 \text{ (m.-kg.)}$$

Hay en la arista opuesta al sol una compresión horizontal, poco importante para una sección de 2400 cm², pero en cambio la flexión es fuerte y tiende á mayorar la curvatura de la torre.

En el punto 3, $M_3 = m + Hr = + 99 \text{ m.-kg.}$ Hay una inflexión un poco antes para

$$m + Hr (1 - \cos \beta_0) = 0 ; \quad r (1 - \cos \beta_0) = - \frac{m}{H} = + 2,73 \text{ m.}$$

contados verticalmente á partir de 1. De 3 á 5 el momento flector disminuye hasta una nueva inflexión

$$m + Hr (1 + \sin \alpha) - \frac{E \Delta I}{e} \sin \alpha = 0$$



que corresponde próximamente á $\sin \alpha = 0,32$. Y á partir de ese punto domina el término negativo y el momento flector crece con este signo hasta $M_s = -213 \text{ m.-kg.}$

Figurando los momentos por ordenadas radiales, con la convención usual de proceder de izquierda á derecha en la fibra neutra ó eje de la pieza, y de representar las flexiones positivas hacia abajo y las negativas hacia arriba, es decir, siempre en el sentido en que se produce la *convexidad* (ó aumento de ella), se obtiene la línea representativa de la figura 21 b. Aunque esta línea da una idea de los *sentidos* de la deformación, figuramos, en escala muy exagerada, la forma de la fibra neutra, teniendo en cuenta que la curvatura en cada punto no procede de la flexión local sola, sino de la *acumulación* de la debida á las flexiones precedentes y de la curvatura propia de la pieza. Así, entre los puntos de inflexión i, i' , lo que se produce es *disminución* de la curvatura inicial y en el resto *aumento* de la misma.

Dividamos la semitorre en dos trozos por el radio del punto de inflexión inferior, i , que está determinado por

$$r(1 - \cos \beta) \times H + m = 0,$$

es decir, que por él pasa la *reacción completa* (*) en 1, de intensidad H y de momento m respecto á 1.

El trozo superior, supuesta fija la sección 5 (fig. 21 c) se deformaría bajo la acción de los momentos $-\frac{EI\Delta}{e}$, aumentando siempre de curvatura, hasta $5 \ 4_s \ i_s$, bastante más allá de lo que el trozo inferior permite y desarrollaría sobre él, si á tanto llegaran las flexiones una *reacción completa*, H'' , mayor que la verdadera (H, m). A su vez el trozo inferior, supuesta fija la sección 1, sufriría bajo la acción impuesta por el superior ($-H''$) una deformación $1 \ 2_i \ i_i$, bastante mayor que la que al verdadero valor ($-H$) corresponde. No puede haber equilibrio con esas deformaciones: tienen que ser *menores* en uno y otro trozo, hasta que las mutuas acciones (H'') y ($-H''$) alcancen,

(*) Es decir, una reacción del valor de H y que ejerce sobre 1 un momento igual á m .

por minoración de aquéllas su justos valores (H) y ($-H$). La posición final de i es intermedia entre la primitiva é i_s ; pero corresponde necesariamente á una *minoración* del diámetro 3 de la torre, así como á una *mayoración* del 1-5, imprescindible por el aumento de curvatura en la casi totalidad y por dicha disminución del diámetro transversal.

Supuesto fijo el centro, como los aumentos de curvatura son mayores en la zona en sombra, á ésta corresponde el mayor crecimiento de radio.

El trabajo de la pared es de compresión compuesta con flexión; ambas alcanzan sus máximos en los extremos del diámetro que contiene al sol. Es mucho más importante la flexión en 1 que en 5; las tensiones horizontales (y verticales como ya en otro ejemplo hemos visto) alcanzan valores bastante grandes en el paramento exterior y, á veces, como en cierto faro ruso, producen en uno y otro sentido grietas muy visibles, que cubren dos zonas muy marcadas, con más intensidad en la región Norte (sombra) que en la Sur. Por la ley del retraso esas zonas no son simétricas respecto al meridiano, sino á uno más al SO.-NE. Las máximas dilataciones, como las temperaturas, se producen después del medio día.

Es fácil, y completará el ejemplo, calcular el incremento del diámetro 1-5. Para conocer el recorrido del punto 1, respecto al 5 supuesto fijo, debemos suponer en 1 una acción ficticia A igual á la unidad, dirigida de arriba abajo, y calcular el momento m' y la expresión del momento flector M' que en el equilibrio bajo dicha acción \bar{I} resultan: M' sustituye, como ya demostramos, á $\frac{dM}{dA}$ en la expresión del recorrido:

$$\frac{1}{EI} \int M \times \frac{dM}{dA} \times dl = \rho_A$$

En dicho equilibrio bajo \bar{I} en el punto 1:

$$(M')_1^5 = m' + H^1 r (1 - \cos \beta) + \bar{I} \times r \sin \beta$$

$$(M')_5^5 = m' + H^1 r (1 + \sin \alpha) + \bar{I} \times r \cos \alpha$$



La nulidad de los recorridos de m^1 y de H^1 da:

$$\pi m^1 + r (1 + \pi) H^1 = -2 r \times \bar{1}$$

$$\pi m^1 + r \pi \times H^1 = -2 r \times \bar{1}$$

$$m^1 = -\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} \quad ; \quad H^1 = 0.$$

Resulta, por tanto,

$$\left(\frac{dM}{d\bar{1}} \right)_1^5 = -\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \operatorname{sen} \beta \times \bar{1}$$

$$\left(\frac{dM}{d\bar{1}} \right)_5^5 = \left(-\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \cos \alpha \times \bar{1} \right)$$

$$\rho_{\bar{1}} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(m + Hr (1 - \cos \beta) \right) \times$$

$$\times \left(-\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \operatorname{sen} \beta \times \bar{1} \right) r d\beta +$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(m + Hr (1 + \operatorname{sen} \alpha) - \frac{E \Delta I}{e} \operatorname{sen} \alpha \right) \times$$

$$\times \left(-\frac{2}{\pi} r \times \bar{1} + r \cos \alpha \times \bar{1} \right) r d\alpha$$

expresión que se reduce, hechas las integraciones, á

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{EI} \left\{ Hr^3 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) + r^3 \frac{E \Delta I}{e} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^9 \times 1152 \cdot 10^{-6}} \left\{ 3^3 \cdot 376 \cdot 1,637 - 3^3 \cdot 1440 \cdot 0,149 \right\} = \\ &= + 0,006.4 \text{ metros.} \end{aligned}$$

De un modo análogo, para calcular la contracción del radio 03, supondríamos una acción $\bar{1}$ en 3 y deduciríamos los valores de m H y V correspondientes á ese equilibrio, escribiendo,

en función de ellos y de $\bar{1}$ los valores generales del momento flector, que sustituirían á las derivadas parciales respecto á la acción ficticia $\bar{1}$ en 3.

Creemos que este ejemplo convencerá al más incrédulo.

Las dificultades, de intento acumuladas, por la naturaleza y modo de obrar de la causa exterior, que se salen por completo de lo usual en los problemas de Mecánica aplicada; la sencillez con que se deducen reacciones incógnitas, leyes de distribución de acciones, modo y cuantía de las deformaciones..., todo ello sin más que aplicar un solo principio, no dejan lugar á duda respecto á la universalidad y excelencia de éste.



VI

Aplicaciones especiales.

El método expuesto es, bien se ha visto, absolutamente universal: reacciones, deformaciones, todo cuanto se necesita conocer en una construcción, se deduce del único y fecundísimo teorema de Castigliano.

Pero á poco que se compliquen la construcción ó las causas exteriores, todo lo que el planteo del problema tiene de sencillo, lo tiene de laborioso el desarrollo de los cálculos, aunque siempre sean éstos bastante más fáciles que los hechos por los métodos ordinarios.

En ciertos casos, *siempre que la influencia de las acciones normales y tangenciales sea despreciable comparada con la de las flexiones*, cabe simplificar considerablemente el proceso, mediante el método tan sencillo como ingenioso del eminente profesor de Berlín, Müller Breslau.

Este método, contenido en su obra *Die neueren methoden der Festigkeitslehre* (*)—*Los nuevos métodos de la Mecánica aplicada* (literalmente: «enseñanza de la resistencia»)—, es el que exponemos á continuación. Pero, enemigos de lo particular, lo desarrollamos con toda generalidad y en lugar de una construcción simétrica suponemos una cuyos planos principales son cualesquiera.

Sea (fig. 22 a) una construcción formada por elementos rectos, ó curvos, sucesivos, sin solución de continuidad elástica,

(*) Librería de Baumgaertner. Leipzig, 1904.



sustentada en dos empotramientos y sometida á un sistema de acciones, de resultante general G .

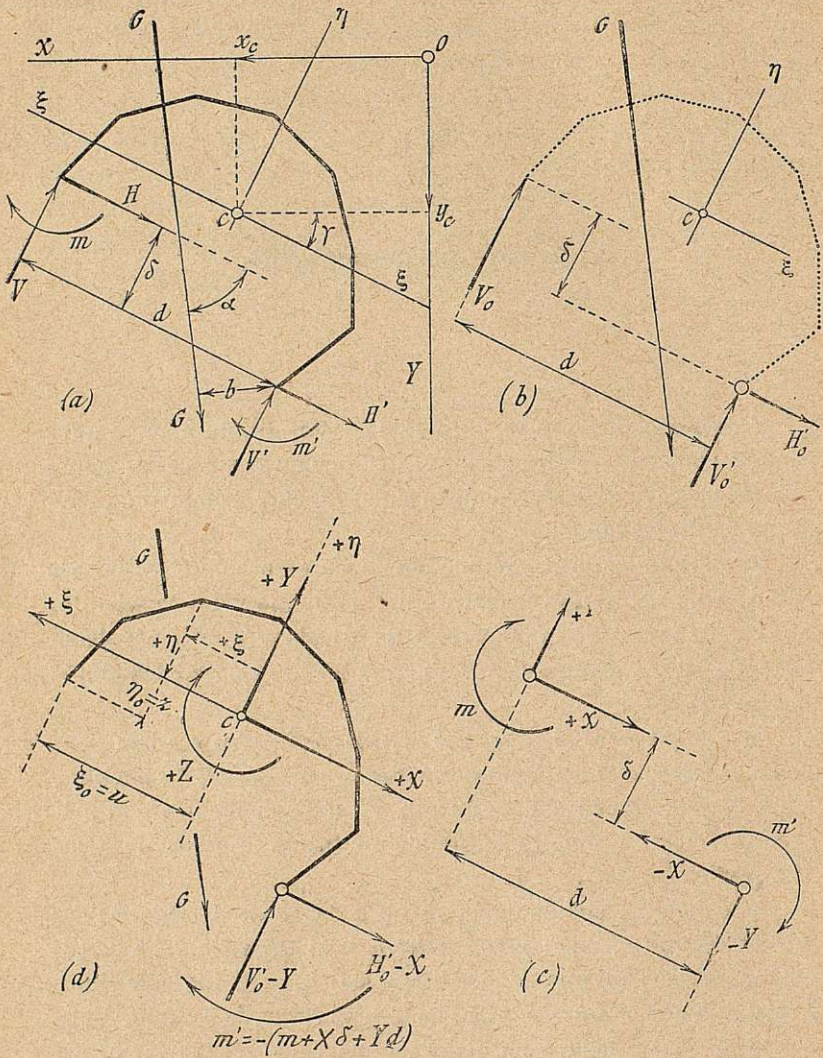


Fig. 22.

Cada elemento tiene un momento de inercia I , constante, ó variable en función de l , longitud de la fibra neutra contada á partir del extremo izquierdo.

Atribuyamos á cada elemento infinitesimal dl , un peso virtual $\frac{I_a}{l} = r$, igual á la relación de un momento *arbitrario*, I_a al suyo propio, l . Determinemos el centro de gravedad, c , de todo el sólido:

$$x_c = \frac{\int r dl \times y}{\int r dl} \quad ; \quad y_c = \frac{\int r dl \times x}{\int r dl}$$

y los momentos

$$(I)_x = \int r dl \times y^2 \quad ; \quad (I)_y = \int r dl \times x^2 \quad ; \quad (I)_{xy} = \int r dl \times xy$$

El ángulo γ , definido por

$$\text{tang } 2\gamma = 2 \frac{(I)_{xy}}{(I)_y - (I)_x}$$

es el de los ejes de la elipse central de inercia ó ejes principales del sólido elástico, con los de coordenadas x, y .

Tomemos estas direcciones $c\xi, c\eta$ como las horizontal y vertical, que hasta ahora hemos usado para descomponer las reacciones totales, y continuemos llamando H, V las componentes respectivas.

Supongamos el problema resuelto y sean m, H, V, m', H', V' , contadas positivamente en los sentidos de la figura 22 a (el cálculo dará los signos que á cada una correspondan) las reacciones parciales buscadas. Entre ellas existen las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} H + H' + G \cos \alpha &= 0 \\ V + V' - G \sin \alpha &= 0 \\ m + m' + Vd + Hb - Gb &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Si el sistema de sustentación, hiperestático, lo convertimos en isostático, sustituyendo por un apoyo móvil y por una articulación los empotramientos izquierdo y derecho (fig. 22 b) á las ecuaciones (43) sustituyen las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} 0 + H'_0 + G \cos \alpha &= 0 \\ V_0 + V'_0 - G \sin \alpha &= 0 \\ 0 + 0 + V_0 d + 0 - Gb &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$



El sistema hiperestático equivale exactamente al isostático si á la resultante general, G , le agregamos un sistema de *causas exteriores* definido por:

$$\left. \begin{aligned} (H + H') - H'_0 \\ (V + V') - V_0 - V'_0 \\ (m + m' + Vd + H\delta) - V_0 d \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

que introducido en (44) á continuación de los términos en G , da exactamente (43).

El sistema de *causas* (45) es idénticamente nulo, puesto que es la diferencia entre dos sistemas de reacciones hiperestáticas (h) é isostáticas (i):

$$\left. \begin{aligned} \{m \ H \ V \ , \ m', H', V' \} \quad (h) \\ \{0 \ 0 \ V_0 \ , \ 0, H'_0, V'_0 \} \quad (i) \end{aligned} \right\}$$

tales que cada uno equilibra totalmente á G .

El sistema (fig. 22 c) definido por

$$\left. \begin{aligned} (X - X) &= 0 \\ (Y - Y) &= 0 \\ (m + m' + Yd + X\delta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

idénticamente nulo, puede sustituir al (45) siempre que las tres indeterminadas X , Y , m , satisfagan, como desde luego habían de satisfacer las H , V , m , las condiciones impuestas á la deformación elástica del sólido por las sustentaciones. Tenemos así, identificando (45) con (46).

$$\left. \begin{aligned} (H + H') - H'_0 &= X - X; \begin{cases} H = +X \\ H' = H'_0 - X \end{cases} \\ (V + V') - V_0 - V'_0 &= Y - Y \begin{cases} V = V_0 + Y \\ V' = V'_0 - Y \end{cases} \\ (m + m' + Vd + H\delta) - V_0 d = m + m' &\begin{cases} m = m \\ m' = -(m + X\delta + Yd) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

En suma, sustituímos el sistema hiperestático por uno equivalente isostático, facilísimo de calcular, sometido á las acciones *reales*, $\Sigma A = G$, más otras acciones *virtuales* (46), que por ser de



resultante nula, sólo desempeñan un papel *distributivo* y equivalen á las fuerzas de enlace impuestas por la naturaleza de las sustentaciones. En cualquier punto del sólido el momento flector *real*, M , es la suma del momento flector, M_0 , producido por las acciones A y del \mathfrak{M} originado por las acciones (46) obrando unas y otras sobre el sistema *isostático*.

De las acciones virtuales (46) traslademos las correspondientes al extremo izquierdo, X , Y , al centro de la elipse de inercia (fig. 22 d), y llamemos Z el par total resultante determinado por la igualdad de momentos alrededor de c :

$$m = -Xz + Yu + Z, \quad (48)$$

que es la expresión del momento de empotramiento en función de las *tres indeterminadas definitivas* X , Y , Z .

En un punto cualquiera determinado por sus coordenadas ξ , η respecto á los ejes principales de inercia,

$$M = M_0 - (X\eta) - (Y\xi) + Z, \quad (49)$$

expresión general, pues tomando como direcciones positivas de ξ , η las marcadas, los signos de $(X\eta)$ y de $(Y\xi)$ son siempre los mismos de η y de ξ .

Aplicemos el teorema de Castigliano, expresando la nulidad de los recorridos de H , V , m .

Las derivadas parciales de (49) respecto á éstas son las mismas que respecto á X , Y , Z , puesto que H , V , m , son respectivamente sumas de X ó Y ó Z con otras cantidades, *constantes* en la derivación parcial respecto á la variable de que se trata. Así, pues,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial H} &= & \frac{\partial M}{\partial X} &= -\eta \\ \frac{\partial M}{\partial V} &= \frac{\partial M}{\partial (V_0 + Y)} & \frac{\partial M}{\partial Y} &= -\xi \\ \frac{\partial M}{\partial m} &= \frac{\partial M}{\partial (-Xz + Yu + Z)} & \frac{\partial M}{\partial Z} &= +1 \end{aligned}$$

Prescindiendo del factor coeficiente de elasticidad que suponemos constante y multiplicando todos los términos, que en la

expresión del trabajo elástico están afectados por $\frac{1}{EI}$, por el momento de inercia arbitrario I_a empleado para la elipse central, las ecuaciones de nulidad de recorridos

$$\int M \times \frac{I_a}{I} \times \frac{dM}{dR} dl = \int M \times \frac{dM}{dR} \times r dl = 0$$

son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} -\int M_0 \eta \times r dl + \int X \eta^2 \times r dl + \int Y \xi \eta \times r dl - \int Z \eta \times r dl &= 0 \\ -\int M_0 \xi \times r dl + \int X \xi \eta \times r dl + \int Y \xi^2 \times r dl - \int Z \xi \times r dl &= 0 \\ +\int M_0 \times r dl - \int X \eta \times r dl - \int Y \xi \times r dl + \int Z \times r dl &= 0 \end{aligned} \right\} (50)$$

Como los ejes coordenados son los de la elipse de inercia:

$$\left. \begin{aligned} \int X \eta \quad r dl &= X \int \eta \quad r dl = 0 \\ \int Y \xi \quad r dl &= Y \int \xi \quad r dl = 0 \\ \int X \xi \eta \quad r dl &= X \int \xi \eta \quad r dl = 0 \\ \int Y \xi \eta \quad r dl &= Y \int \xi \eta \quad r dl = 0 \end{aligned} \right\}$$

Las ecuaciones (50) se reducen cada una á un término en X, ó Y, ó Z y otro en M_0 , resultando sencillamente:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\int M_0 \eta \quad r dl}{\int \eta^2 \quad r dl} \\ Y &= \frac{\int M_0 \xi \quad r dl}{\int \xi^2 \quad r dl} \\ Z &= - \frac{\int M_0 \quad r dl}{\int r dl} \end{aligned} \right\} (51)$$

Recordemos que esta simplificación se debe á prescindir del trabajo elástico correspondiente á los elementos N, T.

$\int M_0 \quad r dl$ valúa el peso de la suma de superficies elementales, ($M_0 dl$), del área comprendida entre el contorno de momentos fle-



tores isostáticos y el eje neutro (fig. 23 a), atribuyendo una densidad virtual $r = \frac{I_a}{I}$ á cada una de aquéllas. Si dentro de cada trozo de l es constante r , la integral vale r veces el área de momentos, que designaremos por \mathfrak{M}_0 :

$$\int M_0 r dl = r \mathfrak{M}_0 \quad (52)$$

y que es de las dimensiones fuerza \times (línea)².

$\int M_0 \eta r dl$ é $\int M_0 \xi r dl$ representan la suma de los momentos estáticos de cada peso elemental ($r M_0 dl$) supuesto concentrado en la fibra neutra, respecto á los ejes ξ ó η . Proyectando sobre

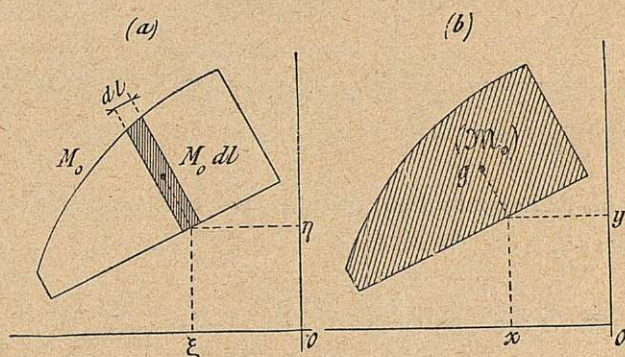


Fig. 23.

aquella el centro de gravedad (fig. 23 b) y llamando x y las coordenadas de la proyección:

$$\left. \begin{aligned} \int M_0 \eta r dl &= r \mathfrak{M}_0 y \\ \int M_0 \xi r dl &= r \mathfrak{M}_0 x \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

que son de las dimensiones fuerza \times (línea)³.

Los momentos isostáticos, M_0 , las áreas que producen, \mathfrak{M}_0 y los momentos de estas áreas, $\mathfrak{M}_0 x$, $\mathfrak{M}_0 y$, entran en la evaluación con sus signos. M_0 , negativo dentro de un trozo, da un área también negativa; pero los momentos estáticos serán negativos ó positivos según que los signos de las coordenadas x , y , de la proyección del centro de gravedad sean $+$ ó $-$.

$\int r dl$ es sencillamente el *peso* virtual del elemento, siempre positivo y de dimensión lineal; lo llamaremos \mathcal{Q} .

$\int \xi^2 r dl$ é $\int \eta^2 r dl$ son los momentos de inercia de esos pesos virtuales respecto á los ejes η y ξ . Son siempre positivos, de la dimensión (línea)³ y los designaremos por $\mathcal{Q}_y^f, \mathcal{Q}_x^f$.

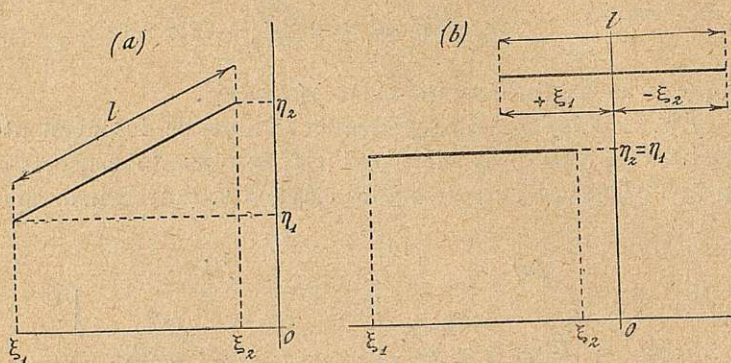


Fig. 24.

En un trozo cualquiera, definido por sus coordenadas extremas $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ (fig. 24 a).

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_x^f &= r \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^2 \times dl = r \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^2 \times \frac{1}{\sin \alpha} d\eta = \\ &= \frac{r}{3 \sin \alpha} (\eta_2^3 - \eta_1^3) \end{aligned}$$

y como $\eta_2 - \eta_1 = l \sin \alpha$

$$\mathcal{Q}_x^f = \frac{r}{3} l \times \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{r}{3} l (\eta_1^2 + \eta_1 \eta_2 + \eta_2^2) \quad (54)$$

Y del mismo modo:

$$\mathcal{Q}_y^f = \frac{r}{3} l \times \frac{\xi_2^3 - \xi_1^3}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{r}{3} l (\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2)$$

Si el trozo es paralelo á un eje y, por tanto, perpendicular al otro (fig. 24 b),

$$\mathcal{Q}_x^f = \frac{r}{3} l \times 3 \eta_1^2 = r l \times \eta_1^2$$

$$\mathcal{Q}_y^f = \frac{r}{3} l \times (\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) = \frac{r}{3} l \times (\xi_2^3 - \xi_1^3)$$

Si $\xi_1 = -\xi_2$, es decir, si el trozo es simétrico respecto á un eje,

$$\mathcal{I}_y = \frac{r}{3} l \times (\xi_1^2 - \xi_1^2 + \xi_1^2) = \frac{r}{3} l \times \xi_1^2 = \frac{r}{12} \times l^3$$

En resumen, calcularemos directamente los elementos:

M_0 , momentos que en cada trozo originan las causas exteriores.

\mathcal{N}_0 , áreas de las superficies representativas de M_0 .

x y y coordenadas de la proyección del centro de gravedad de \mathcal{N}_0 sobre la fibra neutra.

$\mathcal{N}_0 x$, $\mathcal{N}_0 y$, momentos estáticos de las áreas \mathcal{N}_0 supuestas concentradas en la fibra neutra.

\mathcal{L} , peso virtual de cada elemento.

\mathcal{I}_x , \mathcal{I}_y , momentos de inercia de ese peso virtual y obtenidas numéricamente. quedan definidas las tres indeterminadas:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\sum \mathcal{N}_0 y}{\sum \mathcal{I}_x} \\ Y &= \frac{\sum \mathcal{N}_0 x}{\sum \mathcal{I}_y} \\ Z &= - \frac{\sum \mathcal{N}_0}{\sum \mathcal{L}} \end{aligned} \right\} (55)$$

y el problema está resuelto. La expresión (49) da el momento flector real en cualquier punto, en función del momento isostático M_0 ya evaluado. Las (47) hacen conocer las reacciones-fuerzas reales H , V , en función de la isostática V_0 . Proyectando sobre un elemento y sobre su normal, las H , V y todas las fuerzas exteriores existentes entre la sustentación y la sección que se considere, se obtienen la fuerza normal N y la tangencial ó esfuerzo cortante T , que realmente corresponden.

Quando las causas exteriores son variaciones de longitud, uniformes en toda la sección, pero en general variables de una sección á otra,

$$\lambda = \varphi(l) = \psi(\xi, \eta)$$

se obtienen también directamente las indeterminadas X , Y , Z , a condición de prescindir, como antes, del efecto de las fuerzas normales en lo relativo á sus recorridos propios, $\frac{N}{ES} dl$.

En el punto ξ , η , de un elemento que forme el ángulo α con la dirección *positiva* de X , contando α en el sentido negativo á partir de $+X$.

$$\left. \begin{aligned} M &= - (X \eta) - (Y \xi) + Z \\ -N &= + X \cos \alpha + Y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

El signo $-$ de N corresponde á considerar las λ positivas como dilataciones, y por tanto, como negativas las fuerzas normales que producen compresión.

Apliquemos el teorema de Castigliano, según la expresión (25), prescindiendo de los términos

$$\int \frac{N}{ES} \frac{dN}{dR_t} dl + \int \frac{dM}{dR_t} \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl$$

el primero por la pequeña importancia que, desde el principio, suponemos que tiene, y el segundo porque $\lambda_s - \lambda_i = 0$. Resulta

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dX} dl + \int \lambda \frac{dN}{dX} dl &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dY} dl + \int \lambda \frac{dN}{dY} dl &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dZ} dl &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\frac{dM}{dX} = -\eta \quad \frac{dM}{dY} = -\xi \quad \frac{dM}{dZ} = +1$$

$$\frac{dN}{dX} = -\cos \alpha; \quad \frac{dN}{dY} = -\sin \alpha$$



Introducidos estos valores en (57) resulta, multiplicando como siempre todos los elementos dl por un momento de inercia arbitrario, I_a y haciendo $r = \frac{I_a}{I}$

$$\left. \begin{aligned} X \int \eta^2 r dl + Y \int \xi \eta r dl - Z \int \eta r dl &= + EI_a \int \lambda \cos \alpha dl \\ X \int \xi \eta r dl + Y \int \xi^2 r dl - Z \int \xi r dl &= + EI_a \int \lambda \sin \alpha dl \\ -X \int \eta r dl - Y \int \xi r dl + Z \int r dl &= 0 \end{aligned} \right\} (58)$$

Por ser los ejes coordenados los de la elipse central, resulta, como antes, un sólo término en los primeros miembros y quedan, recordando la significación de $\int \eta^2 r dl$ é $\int \xi^2 r dl$:

$$\left. \begin{aligned} X &= + EI_a \frac{\int \lambda \cos \alpha dl}{\Sigma \mathcal{Q} f_x} \\ Y &= + EI_a \frac{\int \lambda \sin \alpha dl}{\Sigma \mathcal{Q} f_y} \\ Z &= 0 \end{aligned} \right\} (59)$$

$\lambda dl \cos \alpha$ y $\lambda dl \sin \alpha$ son las proyecciones sobre X é Y de la variación elemental λdl , contadas positiva ó negativamente, según concuerden ó discuerden con los sentidos positivos de aquéllas.

La exposición del método, máxime con la generalidad que le hemos dado, es más penosa que su aplicación. La gran ventaja que procura es la de dar directamente las tres indeterminadas en función de funciones de los datos, directamente calculables. Por el método general se llega á tres ecuaciones con las tres indeterminadas; los coeficientes de éstas y los términos constantes son funciones de los datos. Cuando las formas ó las causas exteriores se complican algo, las ecuaciones resultan complicadísimas, y no se prestan á un trabajo de investigación en el que se trate de imponer ciertas condiciones á la estructura, uno de cuyos elementos se supone variable. Lo demostrará palmariamente lo que sigue.

Pero, en cambio, no es aplicable estrictamente más que á formas de indeterminación triple, es decir, á pórticos en general. Observemos que la distinción entre los empotramientos izquierdo y derecho nada prejuzga respecto á su posición: pueden con-



fundirse en una misma sección de una *forma constructiva cerrada*, como ya á propósito de los tubos poligonales hemos visto en varios ejemplos.

Ejemplo duodécimo.

Un acueducto está formado por un fondo (fig. 25 a) de longitud $2f$, dos paredes de altura p , que contienen el agua hasta una altura a y que están ligadas una con otra por la riostra superior, de longitud $2f$, empotrada en ellas.

El fondo está soportado por dos nervios, sobre pilares de altura π , separados transversalmente entre ejes $2s$.

Suponemos que la rigidez de estos nervios, respecto á la flexión longitudinal, perpendicular al plano de la figura, es suficiente para poder considerar uniformemente repartida en el vano entre dos pilares consecutivos las reacciones verticales de éstos. Análogamente las riostras, por estar poco espaciadas y unidas á las paredes con fuertes cartabones horizontales, pueden equipararse á una riostra virtual ininterrumpida, más débil naturalmente que la real. Así I_π é I_r serán los momentos de inercia que corresponden en un metro lineal de obra á la repartición uniforme de los momentos absolutos de un pilar y de una riostra.

Estudiaremos, pues, la rebanada de un metro de longitud, limitándonos, por la simetría, á la mitad 1 2 3 4 5 6 : 1 será el empotramiento izquierdo del caso general.

Los momentos producidos en el vértice 4, por la tensión de la riostra y por su momento en el punto 1, así como por el agua en la altura a , se transmiten á todo el fondo. Su suma, considerando como extremo de la *semiconstrucción* el punto 6 en el plano de simetría, es negativa. Del mismo signo son igualmente los momentos originados por la carga de agua que gravita sobre el fondo, de 4 á 6.

El único momento positivo que en esta parte puede aminorar el valor absoluto de aquéllos es el producido por la reacción del pilar, R . Nos proponemos investigar *qué separación, $2s$, es la más ventajosa*.

Si en el punto 5 es el momento flector un máximo, la tangente á la elástica del fondo será horizontal. Un pilar empotrado



en aquel punto sobre el fondo no tenderá á doblarse en ningún sentido, sufrirá un momento flector nulo y trabajará en las mejores condiciones, exclusivamente por compresión, como si en 5 estuviera articulado.

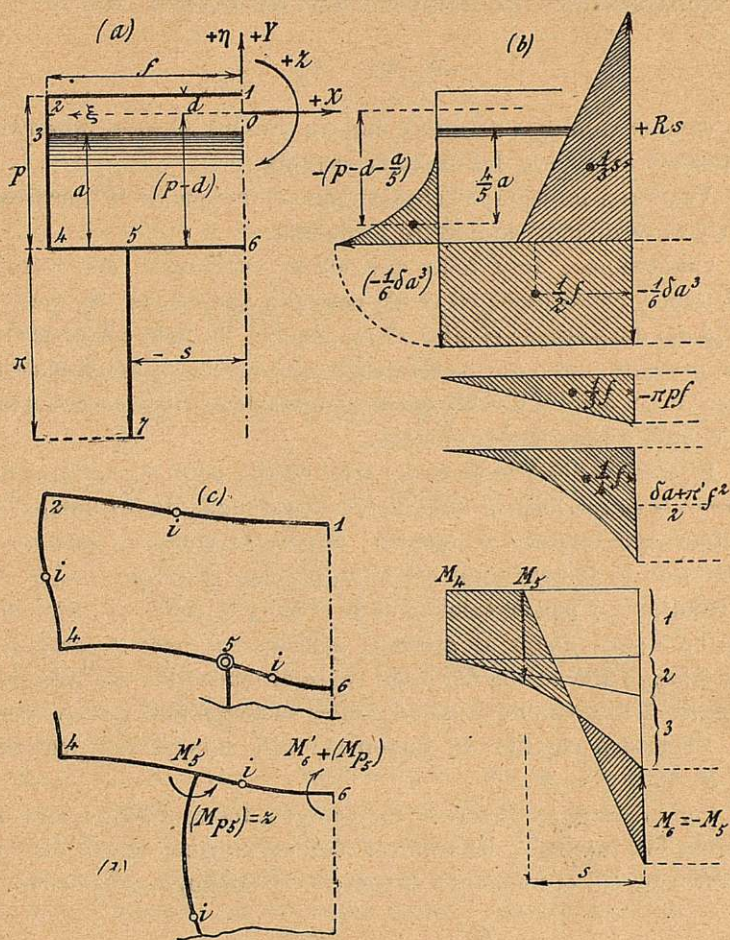


Fig. 25.

Si, prescindiendo de esa condición, imponemos la de que M_s alcance el mismo valor *absoluto* que el momento flector en 6, obtendremos la mayor economía en el fondo. M_s negativo y M_6 po-

sitivo, requerirán una resistencia simétrica pero obtenida con la misma cantidad de materia.

Claro que de 5 á 4 y entre 5 y 6 las flexiones serán menores y el fondo no será de igual resistencia; pero con hormigón armado, sobre todo (y aun con el acero), es preferible en general una sección constante. Determinada, como queda dicho, por

$$M_s = - M_b$$

los valores absolutos de uno y de otro son los *menores* que cabe obtener y la sección del fondo la mínima.

Veamos á un tiempo la aplicación del método de Müller Breslau y la resolución de nuestro problema.

Observemos, ante todo, que en la evaluación del trabajo elástico, y como base, en la del peso \mathcal{Q} y momentos de inercia $\Sigma \mathcal{Q}f$, no debe entrar el pilar. Y en general, en toda construcción que presente uno ó varios elementos que vuelen, saliéndose de la línea fundamental directa entre sustentaciones, tampoco entran en cuenta dichas partes voladas.

El trabajo elástico de esas partes existe, pero *se emplea exclusivamente en trasladar y localizar* en el arranque de los vuelos las acciones que en éstos se ejercen. Supuesta, como en este caso, sustituida la sustentación del pilar por las reacciones m , H , V , la resultante y par de traslación de ellas y de todas las acciones que de 5 para abajo se ejerzan, *aplicados al punto 5 sustituyen exactamente* á la acción del pilar sobre el fondo. En una palabra, pasa en 5 lo mismo que en cualquier sustentación, que se deja en libertad á cambio de imponerle allí mismo las acciones m , H , V .

Por la simetría de forma y de cargas, los ejes principales de inercia son vertical y horizontal. Tomemos como multiplicador arbitrario, I_a , el momento de inercia del fondo, I_f , haciendo

$$\frac{I_f}{I_p} = r \quad ; \quad \frac{I_f}{I_r} = \rho$$

El peso virtual de una mitad es:

$$\frac{1}{2} \Sigma \mathcal{Q} = f(1 + \rho) + rp$$



su momento respecto á la riostra

$$f \cdot p + rp \cdot \frac{p}{2}$$

y el centró de la elipse de inercia está por bajo de la misma

$$d = \frac{p}{2} \frac{2f + rp}{(1 + \rho)f + rp}$$

y desde luego en el plano de simetría.

Los momentos de inercia de la mitad considerada son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \mathcal{J}_x &= \rho f \times d^3 + \frac{r}{3} (d^3 + (p - d)^3) + f (p - d)^3 = \\ &= f \left\{ \rho d^3 + (p - d)^3 \right\} + \frac{r}{3} (d^3 + (p - d)^3) \\ \frac{1}{2} \Sigma \mathcal{J}_y &= \rho f \times \frac{1}{3} f^3 + rp \times f^2 + f \times \frac{1}{3} f^3 = \\ &= f^3 \left\{ \frac{1}{3} (1 + \rho) f + rp \right\} \end{aligned}$$

Evaluemos los momentos de las fuerzas exteriores, áreas de los mismos y momentos estáticos de esas áreas, siempre sobre la mitad estudiada.

En la riostra no actúa causa ninguna. En la pared, si δ es la densidad ó peso del metro cúbico del líquido, la presión á la profundidad z es δz kg.:m², y como consideramos la faja de un metro, δz , que correctamente escrita es $(1 \times \delta z)$, es la carga por metro lineal (*). Al momento flector, siempre negativo:

$$- \delta z \times \frac{z}{2} \times \frac{z}{3} = - \frac{1}{6} \delta z^3$$

(*) Prescindiendo de ese factor unidad, δ pasa á ser de las dimensiones fuerza \times (línea)⁻². Al hacerlo se conserva la homogeneidad y se simplifica la escritura.



corresponde un área total

$$- \int_0^a \frac{1}{6} \delta z^3 dz = - \frac{1}{24} \delta a^4$$

cuyo momento, respecto al nivel del líquido ($z = 0$) es

$$- \int_0^a \frac{1}{6} \delta z^3 \times z dz = - \frac{1}{30} \delta a^5$$

y cuyo centro de gravedad está á la profundidad

$$z_g = \frac{24}{30} a = \frac{4}{5} a$$

Representamos (fig. 25 b), las áreas de variación de momentos, con sus centros de gravedad respectivos y brazos de palanca de éstos.

Respecto al eje ξ el relativo á la pared es $-(p - d - \frac{a}{5})$;

los demás son todos $-(p - d)$ y están suprimidos por claridad. Respecto al eje η aparecen todos (positivos) consignados, menos el correspondiente á la pared que es $+f$.

Los momentos estáticos (53) de esas áreas, respecto á los ejes son:

$$(1) \begin{cases} r \mathfrak{M}_0 x = -\frac{r}{24} \delta a^4 \times (+f) & = -\frac{r}{24} \delta a^4 f \\ r \mathfrak{M}_0 y = -\frac{r}{24} \delta a^4 \times \left(-\frac{4}{5} a - a + p - d\right) & = +\frac{r}{24} \delta a^4 \left(p - d - \frac{1}{5} a\right) \end{cases}$$

El momento máximo $-\frac{1}{6} \delta a^3$ afecta á todo el fondo: el área rectangular $-\frac{1}{6} \delta a^3 f$ produce los momentos estáticos

$$(2) \begin{cases} 1 \cdot \mathfrak{M}_0 x = -\frac{1}{6} \delta a^3 f \times (+f) & = -\frac{1}{6} \delta a^3 f^2 \\ 1 \cdot \mathfrak{M}_0 y = -\frac{1}{6} \delta a^3 f \times \left(-(p - d)\right) & = +\frac{1}{6} \delta a^3 f (p - d) \end{cases}$$



El peso propio de la pared, π kilogramos por metro superficial (*), da sobre el fondo un área de momentos triangular (de cero á $-\pi p \times f$ en el centro), con su centro de gravedad á $\frac{1}{3} f$ del plano de simetría y los momentos estáticos

$$(3) \begin{cases} 1 \cdot \mathfrak{M}_0 x = -\frac{1}{2} \pi p f \cdot f \times \left(+\frac{1}{3} f\right) = -\frac{1}{6} \pi p f^3 \\ 1 \cdot \mathfrak{M}_0 y = -\frac{1}{2} \pi p f \cdot f \times \left(-(p-d)\right) = +\frac{1}{2} \pi p f^2 (p-d) \end{cases}$$

La carga de líquido sobre el fondo, δa , forma un área triangular parabólica, desde 0 hasta $-\frac{1}{2} \delta a \times f^2$ que vale

$$-\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \delta a f^2 \times f = -\frac{1}{6} \delta a f^3$$

y como su centro de gravedad está á $\frac{1}{4} f$ del plano de simetría, da los momentos estáticos

$$(4) \begin{cases} 1 \cdot \mathfrak{M}_0 x = -\frac{1}{6} \delta a f^3 \times \left(+\frac{1}{4} f\right) = -\frac{1}{24} \delta a f^4 \\ 1 \cdot \mathfrak{M}_0 y = -\frac{1}{6} \delta a f^3 \times \left(-(p-d)\right) = +\frac{1}{6} \delta a f^3 (p-d) \end{cases}$$

El peso propio del fondo, π' , (**) da análogamente, sin más que sustituir (δa) por π' :

$$(5) \begin{cases} 1 \cdot \mathfrak{M}_0 x = -\frac{1}{24} \pi' f^4 \\ 1 \cdot \mathfrak{M}_0 y = +\frac{1}{6} \pi' f^3 (p-d) \end{cases}$$

Por último, la reacción del pilar

$$\delta a f + \pi p + \pi' f = 1 \times R (***) = R$$

(*) Por lo ya dicho, escribiendo π en lugar de $1 \times \pi$, se le atribuyen las dimensiones fuerza $\times (\text{línea})^{-1}$.

(**) La misma observación que respecto á π .

(***) Suprimiendo la unidad, es de la dimensión fuerza.



que consideramos como una causa exterior, da momentos positivos, de cero á $+Rs$, un área $\frac{1}{2} Rs \times s$ y momentos estáticos

$$(6) \begin{cases} 1 \cdot \mathfrak{M}_0 x = + \frac{1}{2} Rs^2 \times \left(+ \frac{1}{3} s \right) = + \frac{1}{6} Rs^3 \\ 1 \cdot \mathfrak{M}_0 y = + \frac{1}{2} Rs^2 \times \left(- (p-d) \right) = - \frac{1}{2} Rs^2 (p-d) \end{cases}$$

Todos los elementos de las expresiones (55) están ya calculados y resultan, simplificadas:

$$\begin{aligned} X &= \frac{(p-d) \left\{ -12Rs^2 + 4f^3(\pi' + \delta a) + 12f^2\pi p + 4f\delta a^3 \right\} + r\delta a^2 \left(p-d-\frac{a}{5} \right)}{24f \left\{ \rho d^2 + (p-d)^2 \right\} + 8r \left\{ d^3 + (p-d)^3 \right\}} \\ Y &= \frac{+4Rs^3 - f^4(\pi' + \delta a) - 4f^2(\pi p f + \delta a^3) - f \times r \delta a^4}{8f^3 \left\{ (1+\rho)f + 3rp \right\}} \\ Z &= + \frac{-12Rs^2 + 4f^3(\pi' + \delta a) + 12f^2\pi p + 4f\delta a^3 + r\delta a^4}{24f(1+\rho) + 24rp} \end{aligned}$$

Apliquémoslo á un ejemplo numérico. Sean:

$$\begin{aligned} r &= 10 \quad ; \quad \rho = 80 \\ f &= 5 \quad ; \quad p = 3 \quad ; \quad a = 2,5 \text{ metros.} \\ \delta &= 1 \text{ ton. : m}^3 \quad \text{ó mejor (*) } 1 \text{ ton. : m}^2 \\ \pi &= 0,4 \text{ ton. : m}^2 \quad \text{» (*) } 0,4 \text{ ton. : m. l.} \\ \pi' &= 0,8 \text{ ton. : m}^2 \quad \text{» (*) } 0,8 \text{ ton. : m. l.} \\ R &= 1 \cdot 2,5 \cdot 5 + 0,4 \cdot 3 + 0,8 \cdot 5 = 17,7 \text{ ton. : m. l. ó (*) tons.} \end{aligned}$$

La sustitución de estos valores en las expresiones respectivas da:

$$\begin{aligned} d &= 0,14 \quad p-d = 2,86 \text{ metros.} \\ \mathfrak{L} &= 435 \text{ metros ; } \mathfrak{L}_x = 128,8 \quad ; \quad \mathfrak{L}_y = 4125 \text{ (metros)}^3 \\ X &= (-0,198.0 s^2 + 2,465) \text{ tons.} \\ Y &= (+0,000.7 s^3 - 0,053) \text{ tons.} \\ Z &= (-0,020.0 s^2 + 0,222) \text{ m.-tons.} \end{aligned}$$

(*) Recuérdese lo dicho respecto á la alteración de dimensiones por operar sobre un trozo de longitud uno.

El momento flector en 5 vale:

$$M_5 = + X(p - d) - Y \times s + Z - \frac{1}{6} \delta a^3 - \pi p(f - s) \\ - \frac{1}{2} (\delta a + \pi') (f - s)^2$$

que se reduce á

$$M_5 = - 0,000.7 s^4 - 1,490 s^2 + 10,253 s - 23,783.$$

Si tratáramos de imponer la primera condición, elástica horizontal en 5, M_5 había de ser un máximo. Como allí precisamente obra la reacción del pilar, la expresión de M_5 cambia, presentando un punto anguloso.

Para un valor $(s + ds)$ el momento es $M_5 + dM_5$. Para otro simétrico $(s - ds)$, el valor es $M_5 - dM_5 + Rds$. Si el punto anguloso debe corresponder á un elemento horizontal de la elástica, los giros elementales, á $\pm ds$ del punto 5, deben ser iguales y *del mismo signo*, por referirse uno á la sección izquierda del elemento $(+ ds)$ y otro á la sección derecha de $(- ds)$, y, por tanto:

$$M_5 + dM_5 = M_5 - dM_5 + Rds;$$

$$2 dM_5 - Rds = 0$$

$$7 s^3 + 7450 s - 3507,5 = 0$$

y s debería ser 0,475 metros, es decir, casi como si los dos pilares se reunieran en uno. La condición es prácticamente inadmisibile. Lo sería tan sólo en el caso de una altura a muy pequeña con relación al fondo $2f$.

Impongamos la segunda condición representada *convencionalmente*, prescindiendo de escalas y atendiendo tan sólo á la claridad, en el último diagrama de la figura 25 b. El área de momentos positivos de R está volteada para obtener la superficie representativa final, que es la rayada.

El momento completo en el punto 6 es:

$$M_6 = + X(p - d) + Z - \frac{1}{6} \delta a^3 - \pi p \times f - \frac{1}{2} (\delta a + \pi') \times f^2 + Rs \\ = - 0,590 s^2 + 17,700 s - 23,783$$



$M_s = -M_s$ equivale á:

$$- 0,000.7 s^4 - 2,080 s^2 + 27,953 s - 47,566 = 0$$

ecuación que tiene una raíz real muy próxima á 2,00. En efecto, para ese valor:

$$M_s = -9,248 \quad ; \quad M_s = +9,657 \text{ m.-tons.}$$

Claro que esta solución (representada en escala, pero con la exageración de siempre en la figura 25 c.), ventajosísima para la mayor economía en el fondo, adolece ahora de un defecto: el pilar que hemos supuesto que sólo produce una reacción vertical, se interesa necesariamente en la flexión del fondo, y á menos de introducir una verdadera articulación, reacciona con un cierto momento. Este momento, por bajo del punto 5, es decir, recorriendo como siempre el pilar de izquierda á derecha, de 7 hacia 5, es necesariamente negativo, porque el pilar tiene que presentar la concavidad hacia el interior (fig. 25 d); la flexión del fondo, en cuanto se pasa de 5 hacia 6, es la ya determinada, más la constante *negativa* (M_{p_s}) y en el centro no alcanza ya el valor M_s , sino otro $M_s + (M_{p_s})$ que puede ser todavía positivo, aunque menor que M_s y hasta trocarse en negativo si $M_s + (M_{p_s}) < 0$.

Para conservar la condición impuesta precisa, por tanto, forzar la separación s , con lo que á un mismo tiempo disminuye el valor absoluto del negativo M_s y aumenta el positivo M_s hasta lograr

$$M'_s = - [M'_s + (M_{p_s})] \quad (a)$$

El momento indeterminado (M_{p_s}) debe ser entonces:

$$(M_{p_s}) = - M'_s - M'_s = - (M'_s + M'_s)$$

es decir, menos importante que M'_s .

Para que el problema sea resoluble es preciso:

1.º Que se verifique la ecuación (a), que es de dos variables, s y (M_{p_s}) = z , de la forma

$$\Phi(s) + \varphi(z) = -z \quad (b)$$



2.º Que las elásticas del pilar y del fondo se corten á escuadra en el punto 5 *incógnito*, lo que equivale á otra nueva ecuación en s y z , en la que intervienen las dimensiones geométricas y mecánicas del pilar.

Este, de altura π y momento de inercia I_π (referido al metro lineal de acueducto) soporta en su coronación: el peso ($-R$); la acción horizontal ($+X - \delta a$) (el empuje total $-\delta a$ descompuesto entre la riostra y el fondo da $-X$, equilibrada por $+X$, y $-\delta a - (-X) = +X - \delta a$) y el momento, reacción del fondo sobre el pilar ($-z$). Las reacciones en la base son, tomando como sentidos positivos los de X é Y ,

$$H = -(X - \delta a) \quad ; \quad V = +R \quad ; \quad m = +z - (X - \delta a) \pi (*)$$

y para el punto á la altura u :

$$M_\pi = m - Hu = +z - (X - \delta a) (\pi - u)$$

Como $\frac{dM_\pi}{d(-z)} = -1$, el giro del extremo ó recorrido angular del momento ($-z$) es:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{EI_\pi} \int_0^\pi - \left\{ z - (X - \delta a) (\pi - u) \right\} du = \\ &= - \frac{1}{EI_\pi} \left\{ \pi z - \frac{\pi^2}{2} (X - \delta a) \right\} = - \varphi(s, z) \times \frac{1}{EI_\pi} \end{aligned}$$

En el fondo, partiendo del punto 6 hacia el 5, la expresión del momento á una distancia x , variable, es la general entre 5 y 6, agregándole z y cambiando todo de signo por haber cambiado el sentido, que ahora es de derecha á izquierda.

$$\begin{aligned} M_f &= - \left\{ X(p - a) - Y(f - x) + \right. \\ &+ Z - \pi p \times (f - x) - \frac{1}{2} (\delta a + \pi') (f - x)^2 + R(s - x) + z \left. \right\} \end{aligned}$$

(*) π representa ahora la altura del pilar, fig. 25 a.



y el giro del punto 5, puesto que introducido allí un momento unidad da $+1$, como equivalente de la derivada parcial,

$$\gamma' = \frac{1}{EI_f} \int_0^s -M_f dx = -\frac{1}{EI_f} \times F(s, z)$$

El giro $(+\gamma)$ está contado en el sentido del momento $(-z)$ que es el positivo; el $(+\gamma')$ lo está en el de la unidad positiva. Como las secciones terminales del pilar respecto á la base y del trozo de fondo respecto al plano de simetría, giran ambas en una misma dirección positiva, basta igualar γ y γ' . El sistema:

$$\begin{aligned} \Phi(s) + \psi(s) &= -z & (b) \\ I_\pi \times F(s, z) &= I_f \times \psi(s, z) & (c) \end{aligned} \quad \left\{ \right.$$

determina por completo la solución buscada. Sin desarrollarla numéricamente, lo que sería pesado y sin utilidad práctica, en este caso baste decir que la separación crítica que buscamos depende íntimamente de la flexibilidad del pilar. Si esta es absoluta, entendiendo por tal permitir en 5 un giro sin oponer resistencia, es decir, con una articulación, estamos en el caso primitivo (fig. 25 c). Si, yendo al límite opuesto, la rigidez es absoluta, el semiacueducto *termina* en el punto 5 en un empotramiento perfecto: la longitud *útil* del fondo volado $(f - s)$ y con ella la posición del centro y momentos de inercia, las áreas y momentos estáticos relativos á dicha parte, todo, salvo lo concerniente á la pared, es, como X, Y, Z , función de s fácilmente calculable. El trozo central es una pieza perfectamente empotrada, de luz $2s$ y que solo soporta la carga $(\delta a + \pi')$. La condición se cumple sencillamente haciendo

$$M'_s = + \frac{1}{24} (\delta a + \pi') (2s)^2 = -M'_s = -\varphi(s) \quad (d)$$

Si los pilares no son muy altos, como por regla general, dadas sus fuertes cargas, resultan muy robustos, la ecuación (d) se aproxima bastante á la realidad. Dando á s un valor algo menor se obtiene una solución satisfactoria.



Ejemplo décimotercero.

En un tubo de sección rectangular (fig. 26 a), las temperaturas aumentan gradualmente desde 0° en el punto 1 á $+t^\circ$ en el 3, decreciendo desde allí hasta 0° en el 5. Análogamente, bajan hasta $-t^\circ$ en 7 para subir á 0° en el punto 9-1.

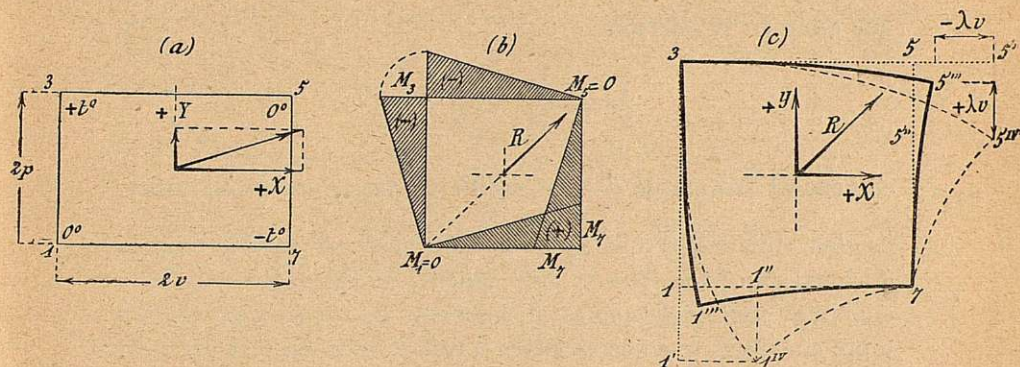


Fig. 26.

Apliquemos las expresiones (59). Sea el momento arbitrario I_a el de los elementos verticales $2p$, I_p y hagamos como siempre $\frac{I_p}{I_v} = r$. Los momentos de inercia totales son:

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{Q}_{f_x} &= 2 \left\{ 2 \cdot rv \times p^2 + 2 \cdot 1 \times \frac{1}{3} p^3 \right\} \\ \Sigma \mathcal{Q}_{f_y} &= 2 \left\{ 2 \cdot 1 \cdot pv^2 + 2 \cdot r \times \frac{1}{3} v^3 \right\} \end{aligned}$$

La dilatación del lado 1-3 corresponde, lo mismo que la del 3-5, á una temperatura media $\frac{1}{2} t^\circ$; las contracciones de 5-7 y 7-1 á esa misma cambiada de signo.

$\int \lambda \cos \alpha dl$ (59) que valúa la suma de proyecciones sobre la dirección $+X$, es, teniendo presente que en el contorno 1 3 5 7 1, el lado inferior se recorre en dirección negativa:

$$2v \frac{\delta t^\circ}{2} - \left(-2v \frac{\delta t^\circ}{2} \right) = +2v \delta t^\circ.$$

Del mismo modo la suma $\int \lambda \sin \alpha \, dl$ vale $+ 2 p \delta t^0$; y por tanto

$$X = + EI_p \frac{3 v \delta t^0}{6 r v p^2 + 2 p^5}$$

$$Y = + EI_p \frac{3 p \delta t^0}{6 p v^2 + 2 r v^5}$$

que están en la relación

$$\frac{Y}{X} = \frac{p^3}{v^3} \times \frac{3 r v + p}{3 p + r v}$$

en general distinta de $\frac{p}{v}$. La resultante de las dos indeterminadas (recuérdese que Z es nula en este caso) no coincide con la diagonal (fig. 26 a). Sea la que quiera, su momento respecto á cualquier punto del tubo es el momento flector y su proyección sobre cualquier trozo es la fuerza normal. R es, en una palabra, la *causa única* cuyo efecto sobre el sólido equivale punto por punto á las reacciones provocadas por las variaciones de longitud. Si éstas pudieran efectuarse en libertad, por estar articulados los ángulos ó por cortar al sólido por un punto rompiendo su continuidad, no habría reacción ni trabajo elástico alguno. Los enlaces rígidos de los cuatro trozos coartan aquella libertad, y al hacerlo desarrollan una serie de reacciones elementales cuya resultante total es precisamente R en magnitud, posición y sentido.

Consideremos por sencillez el tubo cuadrado: $p = v$; $r = 1$. Entonces resultan:

$$X = Y = + EI \times \frac{3 \delta t^0}{8 v^2}$$

R coincide con la diagonal; los momentos (fig. 26 b), nulos en 1 y 5, crecen linealmente hasta $- X v$ en 3 y hasta $+ X v$ en 7.

Claro es que en el sentido de la diagonal 3 7, normal á R , no hay deformación alguna. Si cortamos el tubo por la diagonal que contiene R (fig. 26 c) y mantenemos fijo el punto 3, de obrar libremente las dilataciones, 5 iría á 5' y 1 á 1'. Del mismo modo,

á partir de 7, cuya posición respecto á 3 no puede variar, de obrar libremente las contracciones, 5 vendría á 5'' y 1 á 1''.

Al restablecer los enlaces, 5, que tiene que obedecer á ellos y á las causas exteriores, viene á 5''' y, análogamente, 1 á 1'''. La posición definitiva de los vértices está determinada por la condición de igualdad de la contracción absoluta $-\lambda v$, que los enlaces imponen al lado que se dilata y del alargamiento absoluto $+\lambda v$ que los mismos imprimen al lado que se contrae. El lugar del punto 5''' es, por tanto, la normal á R: su abscisa y ordenada respecto á 5 son:

$$\frac{1}{2} \delta t^0 \times 2v - X \times \frac{2v}{ES} = v \times \delta t^0 \left(1 - \frac{3I}{4Sv^2} \right)$$

Expresando el momento de inercia en función de la sección vertical S y del espesor de la pared e :

$$I = S \frac{e^2}{12} \quad ; \quad x = y = v \delta t^0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{e}{2v} \right)^2 \right]$$

Si la relación $(e : 2v)$ decrece indefinidamente, los vértices 1 y 5 tienden á las posiciones *límites* 1^{IV} y 5^{IV}, que corresponderían á sección y momento de inercia nulos.

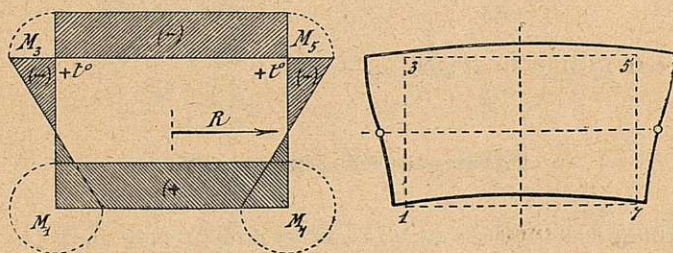


Fig. 27.

Si la variación es la de un solo lado, todo él á $+t^0$, quedando el resto á 0^0 (fig. 27),

$$X = +EI_p \frac{3v \delta t^0}{6rvp^2 + 2p^3}; \quad Y = 0$$

y se obtiene la distribución de momentos representada, con los máximos $\pm X p$. La deformación se figura fácilmente: el lado

superior sufre un acortamiento relativo igual al alargamiento absoluto del inferior; sus valores son:

$$\mp \lambda \times 2v = \mp \frac{X}{ES} \times 2v$$

Si el lado inferior tiene distinto momento de inercia, I'_v , el centro de la elipse está á una altura

$$p \frac{2rv + 2p}{rv + r'v + 2p}$$

mayor cuanto menor es $r' = \frac{I_p}{I'_v}$ es decir, cuanto más grande es I'_v . Si éste es infinito, al degenerar el tubo en un pórtico, la altura llega á su límite superior,

$$p \frac{2rv + 2p}{rv + 2p}$$

El momento de inercia $\Sigma \mathcal{J}_x$ va creciendo y X aminorando. El acortamiento del lado superior deja de ser igual al alargamiento del inferior, pero sus valores son, como siempre

$$- \frac{X}{ES} \times 2v \quad \text{y} \quad + \frac{X}{ES'} \times 2v$$

nulo este último en el pórtico.

Ejemplo décimocuarto.

Aunque el teorema de Maxwell es mucho más conocido que el de Castigliano, por su aplicación más usual, la de cálculo de las líneas de influencia, queremos dar un ejemplo demostrativo de su utilidad en el cálculo de construcciones hiperestáticas. Corolario dicho teorema del de Castigliano, su uso es, como el método de Müller Breslau, un derivado del fecundísimo método general del trabajo elástico.

Expondremos, como preliminar, la aplicación al caso más sencillo; en los más complicados todo se reduce á la repetición de lo hecho en aquél.



Sea 1-2 (fig. 28 a) una pieza, recta, quebrada, ó curva, isostáticamente sustentada mediante una articulación en 2 y un apoyo móvil en 1. Una acción cualquiera que obre á una distancia i de la sustentación izquierda y $l - i = d$ de la derecha, da en 1 una reacción desde luego determinada

$$V_1 = A \times \frac{d}{l}; \text{ y en 2, } V_2 = A - V_1.$$

El momento, también determinado, alcanza su máximo $+ A \times \frac{id}{l}$ en el punto de aplicación de A .

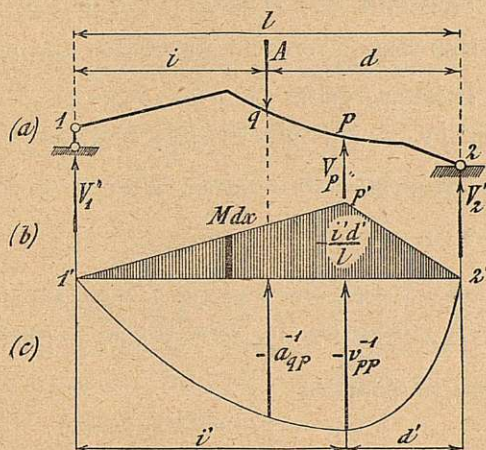


Fig. 28.

Si en punto p introducimos un nuevo apoyo móvil, el sistema se hace hiperestático: la reacción V_p es indeterminada, así como las nuevas V'_1 y V'_2 . La Estática sólo da la condición

$$A - V'_1 - V'_2 - V_p = 0$$

y la de igualdad de momentos alrededor de un punto; la tercera condición, $H = 0$, es inútil en este caso.

En el sistema primitivo, una fuerza igual á la unidad aplicada en p y dirigida como V , en sentido contrario á A , da una

reacción $-1 \times \frac{d'}{l}$ en 1. El momento flector, representado por las ordenadas del triángulo $1' p' 2'$, es

$$M = -1 \times \frac{d'}{l} x = -1 \times \frac{l-i'}{l} x \text{ de } 0 \text{ á } i'$$

$$M = -1 \times \frac{d'}{l} x + 1 \times (x - i') = -1 \times \frac{l-x}{l} i' \text{ de } i' \text{ á } l$$

Sabido es que la elástica es la curva funicular obtenida considerando como distancia polar la magnitud EI y como fuerzas las áreas elementales Mdx de la superficie comprendida entre la línea de momentos M y la de cierre. Sus ordenadas son, en una palabra, los momentos flectores producidos por fuerzas virtuales $\frac{Mdx}{EI}$, ó bien son $\frac{1}{EI}$ veces los momentos originados por las fuerzas Mdx . Basta considerar como área representativa de fuerzas la de M y calcular, ó construir, con una distancia polar, Δ , el funicular correspondiente para tener en la escala de 1 por $\frac{\Delta}{EI}$ las deformaciones (*).

(*) Esta escala es siempre *inversa* porque EI es una magnitud muy grande que resultaría inmanejable: las deformaciones construidas son $\frac{EI}{\Delta}$ veces mayores.

Si las escalas *arbitrarias* son:

$$\text{unidad lineal} < > \begin{cases} l & \text{unidades lineales} \\ f & \text{de fuerza} \\ m & \text{de momento} \end{cases}$$

las áreas (Mdx) de las dimensiones fuerza \times (línea)² que son las mismas de EI , se representan, divididas por una base de reducción arbitraria, b unidades lineales, en la escala:

$$\text{unidad lineal} < > bm \text{ unidades de (momento} \times \text{línea)}.$$

Si en lugar de EI en esa misma escala, se toma la distancia polar n veces menor, Δ , las deformaciones construidas son n veces mayores que las reales, figuradas desde luego en la escala del dibujo. Su escala es:

$$\text{unidad lineal} < > \frac{l}{n} \text{ unidades lineales.}$$

El número abstracto n es generalmente mayor que el del mismo género l : el dibujo da deformaciones $\frac{n}{l}$ veces mayores que las reales.

Cuando la línea de momentos M tiene definición geométrica el cálculo de la elástica como curva de momentos flectores producidos por las cargas Mdx es bastante sencilla.



Construída ó calculada (fig. 28 c) la elástica correspondiente á (-1) aplicado en p , cuya ordenada máxima es según nuestra notación $-v_{pp}^{-1}$ (recorrido en p debido á (-1) actuante en p) la deformación en el punto q es a_{qp}^{-1} . Según el teorema de Maxwell, si en q aplicáramos la acción (-1) el recorrido ó deformación causado en p sería

$$a_{pq}^{-1} = a_{qp}^{-1}$$

es decir, el mismo medido en q en la elástica en magnitud y sentido, que es ascendente.

Cada acción igual á $A \times (+1)$ producirá en p una deformación descendente:

$$+A \times a_{pq}^{-1} = +A \times a_{qp}^{-1} = +v^{(A)}$$

La reacción total incógnita, igual á $V_p \times (-1)$ originará, también en p , una deformación ascendente

$$-V_p \times v_{pp}^{-1} = -v^{(V)}$$

Todas las deformaciones debidas á (-1) actuante en p son conocidas por la elástica (fig. 28 c); en función de ellas podemos expresar la deformación final en p resultante de todas las A y de la V_p incógnita

$$+\sum A \times a_{qp}^{-1} - V_p \times v_{pp}^{-1} = +\sum v^{(A)} - v^{(V)}$$

Si el apoyo p es inmovible V_p queda determinada por

$$+\sum v^{(A)} - v^{(V)} = 0 \quad (60)$$

Si es una pieza de longitud L , sección S y coeficiente de elasticidad E , para desarrollar la reacción V_p sufre un acortamiento ó deformación positiva y el problema queda resuelto por

$$+\sum v^{(A)} - v^{(V)} + V_p \frac{L}{ES} = 0 \quad (60')$$

La cosa no puede ser más sencilla: construída la elástica bas-



ta medir su ordenada máxima para tener el valor de v_{lp}^{-1} ; cada segmento de la línea de acción de una A comprendido entre la elástica y su base $1' 2'$ da a_{qp} y el producto, $A \times a_{qp}$ es $+v^{(A)}$. Si además de acciones finitas concentradas en un punto hay cargas repartidas á razón de c kilogramos por metro lineal, basta observar que subdividida el área representativa de la carga total que afecte á la extensión e ($c \times e$), en n partes iguales, á cada una, $\frac{1}{n} \times ce$, supuesta concentrada en su centro de gravedad corresponderían ordenadas $a', a'' \dots a^{(n)}$, cuyas sumas de productos dan

$$v^{(ce)} = \frac{1}{n} \times ce \left\{ a' + a'' + \dots + a^{(n)} \right\} = \\ = ce \times \frac{a' + a'' + \dots + a^{(n)}}{n}$$

El quebrado representa la *ordenada media* de las n consideradas. Llevando n al límite, la ordenada media *exacta* es

$$\frac{\Sigma a}{n = \frac{e}{\Delta e}} = \frac{1}{e} \int_0^e ade$$

es decir, la relación del área segregada entre la elástica, su base y las verticales extremas de la zona cargada á la longitud e de esta zona. Resulta:

$$v^{(ce)} = c \times \int_0^e ade$$

Si la carga unitaria, c , no es constante, sino variable, $c = \varphi(x)$, el razonamiento subsiste pero aplicado á la media

$$\frac{c'a' + c''a'' + \dots + c^{(n)}a^{(n)}}{n}$$

de las ordenadas de una curva auxiliar formada por los productos ($c \times a$) correspondientes á una misma vertical y resulta entonces:

$$v^{(ce)} = \int_0^e (ca) \times de$$



Estas ordenadas $v^{(ce)}$ corresponden al centro de gravedad del área (ce).

Recordemos que la variabilidad del momento de inercia es fácil de tener en cuenta; cuando existe sigue generalmente una ley $I = I_0 \times \psi(x)$, y siempre se puede integrar la ecuación diferencial, que define las curvas funiculares,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{E} \times \left(\frac{M}{I} \right)$$

Gráficamente es fácil también construir el funicular con distancias polares variables Δ que guarden siempre una misma relación con el producto EI correspondiente como promedio á cada trozo: la escala de las deformaciones resultantes será una sola igual siempre á 1 por $\left(\frac{\Delta}{EI} = \frac{1}{n} \right)$ por la escala del dibujo, l .

Aunque estrictamente basta lo dicho respecto al cálculo de una reacción indeterminada para poder resolver problemas de indeterminación múltiple, desarrollaremos un caso bastante complejo que familiarice al lector con el empleo del método.

Ejemplo décimoquinto.

Sea (fig. 29 a), un pórtico de pilares múltiples, de alturas p_1, p_2, p_3 , etc., que sostienen una cubierta recta, quebrada, ó curva, 1 2 3 4, de ecuación, ó ecuaciones por trozos, conocidas:

$$(y)_1^2 = f(x) \quad ; \quad (y)_2^3 = \varphi(x) \quad ; \quad (y)_3^4 = \psi(x), \text{ etc.}$$

Por las condiciones prácticas que en obras de esta clase concurren, al mismo tiempo que para simplificar el problema, de otro modo formidablemente complicado, admitamos que las sustentaciones de los pilares sobre el suelo, así como las de la cubierta sobre los pilares *intermedios* son articulaciones. El error que esto implica es, en general, desfavorable, es decir, conduce á exagerar las dimensiones de la obra, cuyo trabajo se alivia por efecto de la rigidez de las uniones.

Consideremos el sistema como un pórtico sencillo 0 1 2 3 4 5



articulado en el extremo 5 y con un apoyo móvil en 0 y sometido, aparte de las causas exteriores, á las tres fuerzas de enlace

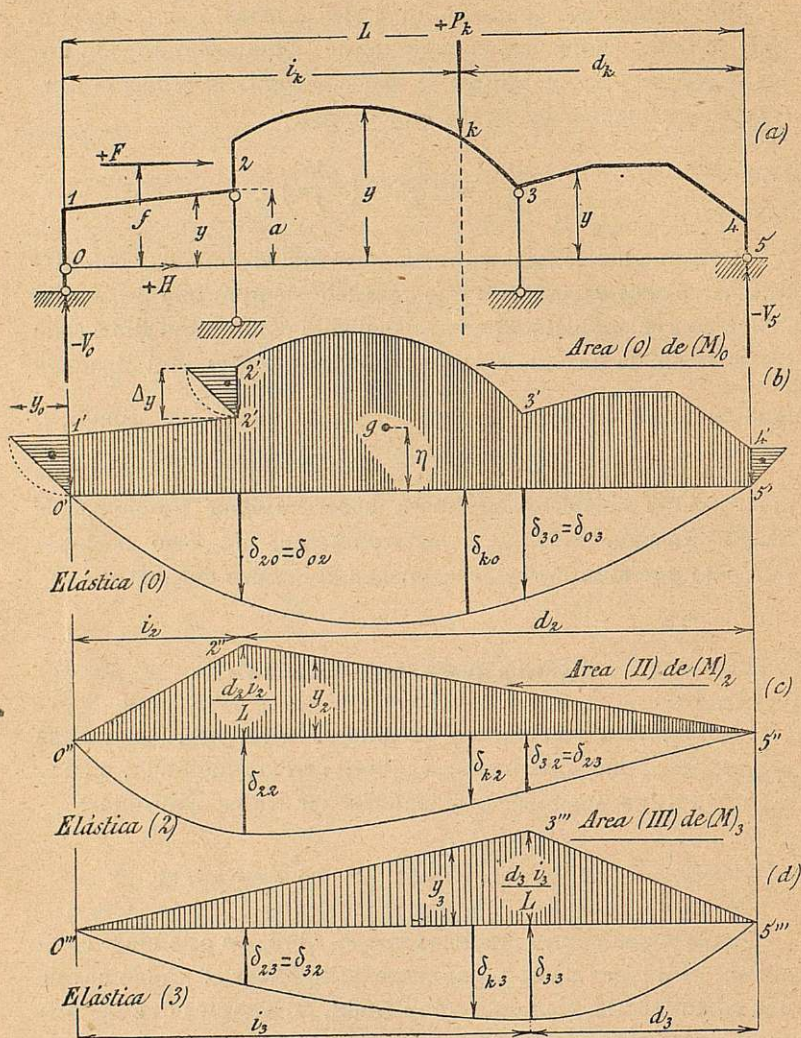


Fig. 29.

incógnitas que le hacen trabajar como á sus verdaderas sustentaciones corresponde. Esas tres causas indeterminadas son: la reacción horizontal H de la articulación izquierda y las verticales

V_2, V_3 de los pilares intermedios: las contaremos positivamente en los sentidos indicados en la figura

En el sistema, hecho isostático al suponer un apoyo móvil en 0 (*), una serie de pesos P_k á distancias i_k del origen dan una reacción ascendente en 0:

$$- V_0 = \frac{\sum P(L - i_k)}{\sum P}$$

y un momento flector

$$+ V_0 x - \sum_0^x P(x - i_k)$$

Si además obran acciones horizontales F á alturas f sobre la articulación 5 se produce en 1 otra reacción vertical *descendente*

$$+ V'_0 = \frac{\sum Ff}{\sum F}$$

y otro momento

$$- V'_0 x - \sum_0^y F(y - f)$$

Designaremos siempre por \mathfrak{N} el momento isostático completo:

$$\mathfrak{N} = + V_0 x - V'_0 x - \sum_0^x P(x - i) - \sum_0^y F(y - f)$$

El momento flector real, en el sistema completo, es, llamando i y d las distancias izquierda y derecha de los apoyos intermedios á los puntos 0 y 5, cada una con el subíndice correspondiente:

$$M_0^2 = \mathfrak{N} - Hy$$

$$\begin{aligned} M_2^5 &= \mathfrak{N} - Hy + V_2(x - i_2) - V_2 \frac{d_2}{L} x = \\ &= \mathfrak{N} - Hy - V_2 \frac{L - x}{L} i_2 \end{aligned}$$

$$M_5^3 = \mathfrak{N} - Hy - V_2 \frac{L - x}{L} i_2 - V_3 \frac{L - x}{L} i_3$$

(*) Está representado, como ya expusimos, por una biela, y sólo puede desarrollar reacciones verticales. La fuerza de enlace $+H$ es, respecto al sistema hecho isostático, una causa exterior cuyo efecto lo identifica con el sistema real hiperestático.



Es decir, que al momento isostático \mathfrak{M} hay que sumarle los del mismo género y signo contrario producidos por las indeterminadas H , V_2 , V_3 .

Procedamos, como en el ejemplo anterior, dando á H un valor (-1) que producirá el momento expresado en general por

$$-(-1) \times y = +1 \cdot y = (M)_0$$

y representado precisamente por las ordenadas y de la cubierta. El área (0), envuelta por el contorno de la misma $0' 1' 2' 3' 4' 5'$ (fig. 29 b), es la de cargas $(M)_0 \times dx$, cuyo funicular nos da las deformaciones descendentes $+\delta_{k0}^{-1}$, producidas en el punto cualquiera k por (-1) actuante en 0. Como esta deformación y todas las sucesivas homólogas han de corresponder siempre á un valor (-1) , prescindiremos del índice, escribiendo sencillamente δ_{k0} .

En la representación gráfica consignaremos solamente los valores absolutos de las δ : los signos que en cada caso correspondan los pondremos entonces de manifiesto.

Observemos que donde hay un elemento vertical de cubierta, como 0 1, el momento $(+1 \cdot y)$ tiene, para la misma abscisa cero, los valores sucesivos representados por el área triangular, horizontalmente rayada.

En el elemento 0 1 obra, por tanto, como una fuerza concentrada, el total $\frac{1}{2} y \times y$, suma de los productos Mdy . En el cálculo ó construcción de la elástica intervienen, además de las cargas Mdx , repartidas según la ley M , esas cargas aisladas en 0, en 2 y en 5.

Del mismo modo á un valor (-1) atribuido á V_2 corresponde

$$(M)_2 = -(-1) \frac{L-x}{L} i_2 = +1 \cdot y_2$$

llamando y_2 (fig. 29 c) á la ordenada del área triangular $0'' 2'' 5''$, determinada por la magnitud

$$+1 \times \frac{L-i_2}{L} i_2 = +1 \times \frac{d_2}{L} i_2$$

en la vertical de V_2 , donde $x = i_2$. A este área de cargas (II) corresponde el funicular relativo á las deformaciones ascendentes $-\delta_{k2}$ producidas en el punto k por (-1) actuante en 2.

Y de un modo idéntico á un valor (-1) de V_3 corresponde:

$$(M)_3 = -(-1) \times \frac{L-x}{L} i_3 = +1 \cdot y_3$$

representado por el área triangular $0''' 3''' 5'''$ (fig. 29 d) determinada por el segmento

$$+1 \times \frac{L-x}{L} i_3 = +1 \times \frac{d_3}{L} i_3$$

en la vertical de V_3 , para $x = i_3$. El área (III) produce el funicular de las deformaciones ascendentes $-\delta_{k3}$ originadas en k por (-1) actuante en 3.

Si todos esos funiculares están trazados con una distancia polar ó serie de distancias polares variables, iguales á $\frac{1}{n}$ de los valores de EI que á cada trozo correspondan, todas las δ son n veces mayores que lo que en la escala lineal del dibujo debieran ser para representar los valores reales.

Supongamos, por claridad, reducidas las causas exteriores á un peso $(+1)$ en el punto k . A uno P_k veces mayor le corresponderá lo que resulte multiplicado por P_k . Y á una serie de pesos $P_k P_l P_m \dots$ la suma de productos obtenida permutando el subíndice k por los demás que haya.

Bajo esa acción $(+1)$ en k , se producen los siguientes recorridos:

En 0 uno dirigido en el sentido de $H = (-1)$, negativo, por tanto, é igual á $-\delta_{0k}$ ó, según el teorema de Maxwell, á $(-\delta_{k0})$.

En 2, otro dirigido en sentido contrario al de V_2 (-1) , positivo, por tanto, $+\delta_{2k}$, igual en valor absoluto, aunque de signo contrario á $-\delta_{k2}$; su valor es $(+\delta_{k2})$.

En 3 otro completamente homólogo del anterior, $+\delta_{3k}$, valorado por $(+\delta_{k3})$.

Todos estos δ los podemos medir directamente: son los segmentos de la vertical k , recortados por las elásticas (0) (2) y (3).



La reacción incógnita H , que como siempre supondremos positiva, da los productos de H por los siguientes recorridos:

En su mismo punto de acción $+\delta_{00}$; en 2 uno ascendente $-\delta_{20}$; en 3 el homólogo $-\delta_{30}$.

La indeterminada V_2 , desde luego ascendente ó negativa, da los productos de V_2 por: en 0, $+\delta_{02} = +\delta_{20}$; en 2, $-\delta_{22}$; en 3, $-\delta_{32} = -\delta_{23}$.

Y la homóloga V_3 , los de su valor por: en 0, $+\delta_{03} = +\delta_{30}$; en 2, $-\delta_{23} = -\delta_{32}$; en 3, $-\delta_{33}$.

Todas estas δ están determinadas también por las verticales 2 y 3 recortadas por las elásticas (0) (2) y (3), *salvo una*: $+\delta_{00}$ que es preciso calcular.

$+\delta_{00}$ es igual á n veces el recorrido del punto 0 bajo la acción $(+1)$ allí aplicada. Para calcularla no hay más remedio que recurrir á la única pero inagotable fuente, á las derivadas del trabajo elástico, al teorema de Castigliano.

$(+1)$ en 0 da un momento expresado en cualquier punto por $M = -(+1) \cdot y$. Si un elemento de la cubierta forma el ángulo α con la horizontal 0 5, la acción normal es

$$N = -(+1) \times \cos \alpha$$

El recorrido del punto 0, resulta de:

$$\frac{dM}{d(+1)} = -y (*) \quad ; \quad \frac{dN}{d(+1)} = -\cos \alpha = -\frac{dx}{dl}$$

$$h_0^1 = \int_0^5 + \frac{y^2}{EI} dl + \int_0^5 + \frac{\cos \alpha}{ES} dx \quad (61)$$

expresión perfectamente calculable si y , y , por tanto, $\cos \alpha$ y

$\frac{dx}{dl} = \frac{dx}{\cos \alpha}$ tienen, como I y S , una expresión en función de x .

(*) Recuérdese lo dicho á propósito de la derivación: $\frac{dM}{d(+1)}$ no es sino una abreviatura de $\frac{dM}{d(+1+\alpha)}$, suponiendo que la acción es una variable $(+1+\alpha)$ que tiende á su límite $(+1)$.

Si S é I son constantes ó se pueden aproximadamente sustituir por promedios S' é I' y si los ángulos α no alcanzan gran valor y se puede tomar 1 ó un número muy próximo á 1 como valor medio de su coseno y confundir dl con dx :

$$\int \frac{y^2}{EI} dl = \frac{1}{EI'} \times 2 \int \frac{1}{2} y \times y dx = \frac{2}{EI'} \times \mathcal{A} \eta$$

llamando \mathcal{A} el área 0 1 2 3 4 5 0 y η la altura de su centro de gravedad (fig. 29 b).

$$\int \frac{\cos \alpha}{ES} dx = \frac{1}{ES'} \times L$$

$$h_0^4 = \frac{2}{EI'} \mathcal{A} \eta + \frac{1}{ES'} L$$

Cuando, como en la figura supuesta, hay áreas triangulares, producidas por elementos verticales como 01, dl es, en esos trozos en que x permanece constante, igual á dy . Hay que agregar á los términos anteriores los homólogos, relativos á cada triángulo.

$$\int \frac{y^2}{EI} dl = \frac{1}{EI'} \times 2 \int \frac{1}{2} y \times y dy = \frac{1}{EI'} \times \mathcal{A}_t \eta_t = \frac{2}{EI'} \times \frac{(\Delta y)^3}{3}$$

$$\int \frac{\cos \alpha}{ES} dx = 0$$

Si, como corresponde á la figura, las expresiones son muy complicadas, las integrales se pueden valuar gráficamente. Se conoce por fin $\delta_{00} = n \times h_0^4$

Calculadas ó medidas todas las δ , conocemos las expresiones de los recorridos totales de H , V_2 , V_3 , que igualados á los valores que la *calidad* de las sustentaciones permita (recorridos nulos, ó expresables en función de H , V_2 , V_3 , ó de las variaciones de temperatura), dan otras tantas ecuaciones. Tenemos en resumen, recordando que las δ están amplificadas n veces y llaman-



do $+h$, $-v_2$, $-v_3$, los recorridos ya dichos, nulos ó calculables:

$$\left. \begin{aligned} +n \times h &= -\Sigma P_k \times \delta_{k0} + H \times \delta_{00} + V_2 \times \delta_{20} + V_3 \times \delta_{30} \\ -n \times v_2 &= +\Sigma P_k \times \delta_{k2} - H \times \delta_{20} - V_2 \times \delta_{22} - V_3 \times \delta_{32} \\ -n \times v_3 &= +\Sigma P_k \times \delta_{k3} - H \times \delta_{30} - V_2 \times \delta_{23} - V_3 \times \delta_{33} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Una sencilla regla evitará la confusión que á primera vista ofrecen los subíndices. Recordemos que, según nuestra notación, adoptada desde un principio, el primer subíndice designa el lugar de la *deformación* y el segundo el lugar de la *causa* que la produce. A cada causa indeterminada corresponde una elástica que lleva la numeración del lugar donde aquélla obra.

(0) para H actuante en 0

(2) » V_2 » » 2

(3) » V_3 » » 3

Todos los términos en P , en V_2 y en V_3 en las tres ecuaciones tienen la misma ley de formación. El primer subíndice es el de la misma indeterminada ó de la misma P ; el segundo es el característico de la reacción cuyo recorrido expresa la ecuación: 0 para la primera (h); 2 para la segunda (V_2), 3 para la tercera (V_3). Los términos en H son los únicos que en la segunda y tercera ecuaciones derogan la ley invirtiéndola, δ_{20} en lugar de δ_{02} y δ_{30} en el de δ_{03} . Y esto procede sencillamente de que siendo H horizontal y las V verticales, aunque el teorema de Maxwell subsiste siempre (y de él nos aprovechamos al permutar los subíndices) no se puede, gráficamente, utilizar elásticas de ordenadas verticales para medir los recorridos horizontales de los vértices de ellas mismas.

El procedimiento no deja de ser laborioso, pero no se pierda de vista lo complicado de la estructura supuesta: Sin llegar en la práctica á la figura que para poner en evidencia la generalidad del método hemos atribuido á la cubierta, pueden resolverse con relativa facilidad problemas tan difíciles como el *arco continuo* de n tramos, con apoyos á distintas alturas.



Para no complicar la exposición hemos dejado á un lado las fuerzas horizontales. Estas producen en el sistema isostático la reacción descendente $+V'_0$, que no origina deformación, y, trasladadas al nivel de $+H$, mediante los pares Fy_f dan, en el lado 0 1:

Un empuje total $(H + \sum F)$, que sustituirá como multiplicador de δ_{00} á H ;

Un momento $\sum Fy_f$ concentrado en el elemento 0 1, que se agregará al representado por el triángulo y que entrará en la determinación de la elástica (0).

En el lado parcial 2 2, trasladadas á la articulación con el pilar, darán otro momento concentrado, que se agregará al triángulo, más un empuje secundario, H_2 , cuyo valor, perfectamente determinado, $\sum_2 F$ es el de una causa exterior que obra á la altura a sobre el primario H . Desde 2 en adelante habrá que tener en cuenta el momento $H_2 (y - a)$. Esto nos obligará á construir la elástica especial correspondiente á la superficie de carga de ordenadas $(y - a)$, que utilizaremos como las otras para determinar los segmentos relativos á P , V_2 y V_3 . Pero además tendremos que calcular directamente la deformación horizontal δ_{2h} homóloga de δ_{00} . En suma, las ecuaciones quedarán sustituidas, indicando con el subíndice h la nueva elástica, homóloga de la (0), por las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} +n \times h &= -\sum P_k (\delta_{k0} + \delta_{kh}) + (H + \sum_0^1 F) \times \delta_{00} + (\sum_2^2 F) \times \delta_{2h} \\ &\quad + V_2 (\delta_{20} + \delta_{2h}) + V_3 (\delta_{30} + \delta_{3h}) \\ -n \times v_2 &= +\sum P_k \delta_{k2} - (H + \sum_0^1 F) \delta_{20} - \sum_2^2 F \times \delta_{2h} - V_2 \times \delta_{22} - V_3 \times \delta_{32} \\ -n \times v_3 &= +\sum P_k \delta_{k3} - (H + \sum_0^1 F) \delta_{30} - \sum_2^2 F \times \delta_{3h} - V_2 \times \delta_{23} - V_3 \times \delta_{33} \end{aligned} \right\} (63)$$



VII

Aplicación á los entramados.

Los teoremas y métodos relativos á los trabajos virtual y real se encuentran, casi siempre, expuestos y razonados relativamente á los sistemas reticulares ó entramados con articulaciones; y, por extensión, se generalizan después aplicándolos á las piezas prismáticas formadas por infinidad de fibras elementales.

Enemigos de lo que, si no en el fondo, en la forma parece dar cierto carácter de particularidad á principios tan hermosos como fecundos, y, sobre todo, tan absolutamente generales, *dentro siempre del periodo de elasticidad perfecta*, hemos invertido el orden de exposición.

Descender ahora de lo general, el sólido elástico, integral de las fibras infinitesimales, á lo particular, el entramado, suma de unas cuantas barras finitas, es facilísimo.

Recordemos previamente que un sistema compuesto por barras unidas mediante articulaciones que se suponen *sin rozamiento alguno*, puede ser, por su constitución *geométrica*: deformable, rígido ó estrictamente indeformable y superabundante.

Si ν es el número de nudos ó articulaciones y β el de barras, un sistema plano, á los que limitaremos el estudio, es:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{deformable si} & \beta < 2\nu - 3 \\ \text{rígido si} & \beta = 2\nu - 3 \\ \text{superabundante si} & \beta > 2\nu - 3 \end{array} \right\} \quad (64)$$



Por sus condiciones *mecánicas*, un sistema está sometido á un cierto número de acciones, fuerzas en algunos nudos, y en otros, á otro cierto número de reacciones totales, *a priori* desconocidas. Estas reacciones totales sólo pueden ser, tratándose de nudos ó puntos y no de secciones, de dos géneros: procedentes de un apoyo móvil, que, como sabemos, implica una sola reacción elemental (H ó V) ú originadas por una articulación, que equivale á dos reacciones (H y V).

Si las sustentaciones son δ apoyos dilatables y α articulaciones, hay un número total de reacciones elementales

$$\rho = \delta + 2\alpha$$

Un sistema que no sea superabundante forma un conjunto isostático, cuando

$$2\nu = \beta + \rho \quad (65)$$

Si se cumple (65), conocidas las acciones se pueden calcular simplemente por la Estática las ρ reacciones elementales H y V y las β fuerzas B que comprimen ó estiran las barras.

Cuando

$$2\nu < \beta + \rho \quad (66)$$

el sistema es hiperestático, ó indeterminado del orden ó número de veces:

$$i = \beta + \rho - 2\nu \quad (67)$$

Así, por ejemplo, la estructura más sencilla, un arco de tres articulaciones, es geométricamente deformable porque

$$\begin{aligned} \beta &< 2\nu - 3 \\ 2 &< (2 \cdot 3 - 3 = 3) \end{aligned}$$

pero si cada nudo inferior está sustentado por una articulación, el número ρ es 2×2 y $\rho + \beta = 6 = 2\nu$; y, en efecto, el conjunto es isostático.

Si se le agrega una tercera barra, un tirante entre las dos sustentaciones articuladas, el sistema se hace hiperestático, $3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1$ vez indeterminado. Para que vuelva á ser



isostático precisa rebajar ρ á 3, convirtiendo una de las sustentaciones en apoyo de dilatación.

La indeterminación hiperestática puede afectar, según los casos, á las reacciones elementales, á las barras ó á unas y á otras.

Desde luego, siempre que en un sistema plano resulta $\rho > 3$, hay, respecto á las reacciones por sí solas, indeterminación del orden $(\rho - 3)$.

La indeterminación total del conjunto de reacciones y barras puede aminorar y hasta hacerse nula si $\beta < 2\nu - 3$. Cuando el número $2\nu - 3 - \beta$, que, supuesto lo anterior, es positivo, iguale á $\rho - 3$:

$$2\nu - 3 - \beta = \rho - 3 \quad ; \quad 2\nu - \beta - \rho = \iota = 0;$$

y el conjunto es isostático.

Si $\beta > 2\nu - 3$, hay una indeterminación, relativa á las barras, del orden $2\nu - 3 - \beta$, que *no puede ser disminuida* por la forma de las sustentaciones, y la total del conjunto es:

$$\iota = (\rho - 3) + (2\nu - 3 - \beta) = \rho + 2\nu - \beta - 6 \quad (68)$$

Por último, una estructura *compuesta*, formada por ε entramados, cada uno de los cuales posee por sí solo, por lo menos, una sustentación, es isostática cuando el total de reacciones elementales de todo el conjunto, $\Sigma \rho$ satisface á

$$\Sigma \rho = 3 + \varepsilon - 1 = \varepsilon + 2 \quad (69)$$

é hiperestática del orden total $(\Sigma \rho - \varepsilon - 2)$ si éste es > 0 .

Si alguno de los entramados es deformable, se rebajará la indeterminación total. Si, por lo contrario, alguno es superabundante, el conjunto tendrá la indeterminación $(\Sigma \rho - \varepsilon - 2)$, más la $(2\nu - 3 - \beta)$ relativa á las barras de aquel entramado.

Hemos recordado todo lo anterior (sin creer necesario consignar la demostración que puede verse en cualquier tratado general), sencillamente como medio de conocer *a priori* el número de indeterminadas que en cualquier problema puede existir, número que es el de variables independientes con que hemos de contar.



Consideremos un entramado ι veces indeterminado: lo forman β barras, cuyas compresiones ó tensiones, que ahora son las únicas fuerzas elásticas, llamadas Φ en la primera parte de este estudio, designaremos en lo sucesivo por B . Las longitudes serán b , y los recorridos elásticos φ estarán expresados por

$$\Delta b = b \times \frac{B}{ES} \quad (70)$$

B , b , Δb se referirán á cada barra, de número de orden k , por el subíndice k .

Entre todas esas fuerzas elásticas B hay N , número menor, ó, á lo sumo, igual á ι , que son indeterminadas, á las que llamaremos Y .

De las φ reacciones elementales R , desarrolladas en las sustentaciones, 3 son conocidas por la Estática y $\varphi - 3 = n$, número á lo sumo igual, ó menor que ι , indeterminadas, que, como las otras, designaremos también por Y . Siempre tendremos

$$n + N = \iota.$$

Como ya hemos visto, un sistema hiperestático equivale exactamente á uno isostático, en el que ciertas fuerzas exteriores sustituyen á las reacciones indeterminadas ó fuerzas de enlace. Si por el momento, dejando obrar las causas exteriores ΣA , suprimimos las $n = \varphi - 3$ reacciones indeterminadas, las restantes serán calculables por la Estática y las llamaremos R^0 . De un modo análogo, un entramado superabundante es idéntico á uno rígido, en el que á cada barra en exceso se sustituyen dos fuerzas exteriores iguales á la B que á aquella barra corresponde y aplicadas en sentidos inversos, una á cada uno de sus extremos. Se modifica, claro es, la distribución y valores de todas las B , pero sin alterar su resultante, puesto que las resultantes de esas fuerzas exteriores, sustitutivas de las barras suprimidas, son idénticamente nulas. Es lo mismo que ya hemos visto en el método de Müller Breslau respecto al sistema de fuerzas

$$\pm X \pm Y = 0 + 0.$$

Así pues, si en el entramado suprimimos las N fuerzas de las barras superabundantes, el sistema rígido calculado por los

métodos de Ritter, Culmann ó, mejor, Maxwell (*), nos dará las fuerzas B^0 , producidas solamente por las causas ΣA .

Dentro del período de elasticidad perfecta, por la exacta superposición de los efectos, cada indeterminada de valor Y , que aisladamente consideremos, nos dará análogamente en el sistema rígido, sustentado isostáticamente, reacciones elementales $R' \propto Y'$, $R'' \propto Y''$ y fuerzas elásticas $B' \propto Y'$, $B'' \propto Y''$... En el conjunto hiperestático y superabundante, una reacción cualquiera, suma de todas las parciales, será de la forma

$$R = R^0 + R' Y' + R'' Y'' + \dots + R^{(i)} Y^{(i)} \quad (71)$$

y análogamente una fuerza elástica

$$B = B^0 + B' Y' + B'' Y'' + \dots + B^{(i)} Y^{(i)} \quad (72)$$

R' , R'' son las reacciones elementales producidas por las indeterminadas respectivas de valor unidad; B' , B'' las fuerzas elásticas análogamente originadas. Y más en general, unas y otras son las *derivadas parciales* de R ó de B , respecto al valor de la indeterminada del mismo índice:

$$R^{(k)} = \frac{dR}{dY^{(k)}} \quad ; \quad B^{(k)} = \frac{dB}{dY^{(k)}} \quad (73)$$

Recordemos que á cada una de las β barras ó de las p reacciones corresponde un subíndice igual á su número de orden y que debe ser también el mismo para las derivadas parciales $B^0 B' \dots B^{(i)}$, $R^0 R' \dots R^{(i)}$ correlativas con la barra ó reacción.

Formemos la expresión del trabajo elástico gradualmente desarrollado, sin prejuizar nada respecto á los recorridos r de las reacciones R .

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} \Sigma Aa - \frac{1}{2} \Sigma Rr = \frac{1}{2} \Sigma B \times \Delta b \quad (74)$$

Recordemos nuestra demostración del teorema de Castiglione: cualquiera que sea el trabajo de las reacciones, $\frac{1}{2} \Sigma Rr$, la

(*) Fué Maxwell, ocho años antes que Cremona, quien primero utilizó las figuras recíprocas en el cálculo de los sistemas indeformables.



derivada parcial de \mathfrak{T} respecto á una causa mide el recorrido de ésta.

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dY^{(k)}} = y^{(k)}$$

Sustituyendo en (74) el valor de Δb , el trabajo elástico desarrollado por el sistema de acciones graduales ΣA es:

$$\mathfrak{T}_{(A)} = \frac{1}{2} \Sigma B \times \frac{Bb}{ES} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{B^2 b}{ES}$$

y el recorrido $y^{(k)}$ de la causa $Y^{(k)}$:

$$\frac{d\mathfrak{T}_{(A)}}{dY^{(k)}} = y^{(k)} = \Sigma \frac{dB}{dY^{(k)}} \times \frac{Bb}{ES} = \Sigma B^{(k)} \times \frac{Bb}{ES} \quad (75)$$

suma que debe extenderse á todas las barras del entramado, variando los subíndices de $B^{(k)}$, B , b , S , desde 1 hasta β .

Una variación lineal, λ , constante para todas las barras, ó distinta para cada una, origina un trabajo elástico

$$\mathfrak{T}_{(\lambda)} = \frac{1}{2} \Sigma B_{(\lambda)} \times \Delta b + \Sigma B_{(\lambda)} \times \lambda b$$

El factor $\frac{1}{2}$ afecta al recorrido Δb que gradualmente se desarrolla bajo la acción de $B_{(\lambda)}$ y al mismo tiempo que ella, pero no al recorrido λb independiente de la misma.

El recorrido debido á las variaciones λ , es:

$$\frac{d\mathfrak{T}_{(\lambda)}}{dY^{(k)}} = y_{(\lambda)}^{(k)} = \Sigma \frac{dB_{(\lambda)}}{dY^{(k)}} \times \frac{Bb}{ES} + \Sigma \frac{dB_{(\lambda)}}{dY^{(k)}} \times \lambda b \quad (76)$$

suma extendida á todas las barras variando los subíndices de $B^{(k)}$ b y λ , si es variable, desde 1 hasta β .

Si, como siempre, el recorrido $y^{(k)}$ es ó nulo, ó expresable en función de la indeterminada á que corresponde las expresiones (75) ó (76) nos darán tantas ecuaciones como incógnitas.

Llamando b_k y S_k la longitud y sección de la barra su-

perabundante á que corresponde la fuerza Y^k ó del soporte sobre el cual gravita esa reacción, son dichas ecuaciones de las formas:

$$y^{(k)} = 0 \quad (77)$$

$$y^{(k)} = Y_k \times \frac{b_k}{ES_k} \quad (77')$$

Las derivadas parciales $B^{(k)}$ son, como siempre, los valores que toma la tensión ó compresión en cada barra cuando en los extremos de la superabundante de índice (k) se hacen actuar en opuestos sentidos dos fuerzas iguales á la unidad y se hacen nulas todas las demás acciones é indeterminadas, es decir:

$$(B)_k^1 = 0 + 0 + \dots + (B^{(k)} \times 1) + 0 + \dots + 0$$

En realidad la derivada no es $B^{(k)}$ sino $(B^{(k)} \times 1)$ como ya hicimos notar: si prescindimos de la unidad es por abreviar. Pero la existencia de ese factor *uno* demuestra que es indiferente que los sentidos de las dos fuerzas unidad converjan ó diverjan: el signo de $(B)_k^1$, fuerza en B producida por 1 actuante en k, será siempre el mismo, por efecto del signo propio del multiplicador unidad. Conviene, sin embargo, adoptar siempre un signo fijo para la fuerza unidad; y como contamos positivamente las dilataciones, aplicar las fuerzas $+1$ en los sentidos en que la barra superabundante actúa sobre los nudos que la limitan cuando está atirantada y conservar á la derivada $B^{(k)}$, el signo de $(B)_k^1$, positivo si es una tensión y viceversa.

Generalmente será más fácil que calcular, *construir* los valores de todas las $B^{(k)}$ por medio de tantas figuras recíprocas ó polígonos de Maxwell, como indeterminadas Y existan.

Otro polígono análogo relativo al sistema hecho rígido é isostático, por supresión de todas las Y, nos dará los valores B^0 , originados en el equilibrio bajo las causas ΣA .

Conocidos sus valores numéricos formaremos las β expresiones (72) de los polinomios $B_1 B_2 \dots B_\beta$

Como E es, generalmente, uno mismo, y muchas barras suelen tener igual sección, facilita mucho las operaciones escribir en lugar de (75)

$$ES_a \times y^{(k)} = \Sigma B^{(k)} \times Bb \times \frac{S_a}{S} \quad (75')$$

tomando para la sección arbitraria, S_a , la que sea común á mayor número de barras. Haciendo $\frac{S_a}{S} = r$, formaremos todos los productos de la forma:

$$(brB^{(k)}) \times B = (brB^{(k)}) \times (B^0 + B^1 Y^1 + B^2 Y^2 + \dots + B^{(k)} Y^{(k)} + \dots + B^i Y^i) \quad (78)$$

en los que $b, r, B^{(k)}, B$, recibirán sucesivamente los subíndices 1, 2, ..., β . La suma de esos β polinomios será una de las ecuaciones (77). Otras análogas obtenidas variando el índice k de la derivada parcial desde 1 hasta i , completarán el sistema de i ecuaciones que definan las i indeterminadas Y .

Hay en resumen que hacer: $(i + 1)$ polígonos de Maxwell, que dan $(i + 1) \times \beta$ valores de $B^{(k)}$; $(i \times i)$ productos parciales $B^{(k)} B^{(i)} Y^{(i)}$ para cada subíndice ó un total de $i^2 \times \beta$; $\beta \times i$ sumas de esos productos, multiplicada cada una por el producto parcial br que entre los β del mismo género le correspondá; en total $i^2 \beta + i \beta^2$ operaciones preparatorias, aparte de las auxiliares, para obtener r, br y $ES_a y_k$. Para resolver las i ecuaciones hay que calcular $i + 1$ determinantes del grado i , lo que requiere otra buena cantidad de operaciones.

El procedimiento, como se ve, resulta laborioso, no por el método, sino por la índole de los sistemas reticulares, en los que se debe huir de la superabundancia, sea en barras, sea en reacciones, para llegar á entramados estrictamente indeformables y sustentaciones isostáticas.

Ejemplo décimosexto.

El entramado simétrico 1 2 3 7 8 9 3' 2' 1' (fig. 30 a) consta de $\beta = 16$ barras unidas por $\nu = 9$ nudos: hay una superabundante ($2 \times 9 - 3 = 15$) que es el tirante 9. Sustentado el sistema en dos articulaciones ($\rho = 4$), hay una reacción indeterminada. El conjunto tiene una indeterminación doble (67)

$$i = \beta + \rho - 2 \nu = 16 + 4 - 18 = 2$$

Suprimiendo el tirante 9, ν no varía, β baja á 15, el entramado resulta rígido é i se reduce á 1. Si además la sustentación iz-

quierda s convierte en un apoyo dilatante, p baja á 3 y el sistema rígido, isostáticamente sustentado, no presenta indeterminación alguna.

Si suprimiéramos las cuatro barras centrales y el nudo en que convergen, $\beta' = 12$; $\nu' = 8$ y el entramado, geoméricamente deformable ($12 < 2 \times 8 - 3$), constituiría un conjunto también deformable si estuviera isostáticamente soportado. Sustentado por dos articulaciones, el trapecio central se hace rígido: su deformación es incompatible con la simultaneidad de los giros alrededor de aquéllas y el conjunto es isostático, perfectamente determinado.

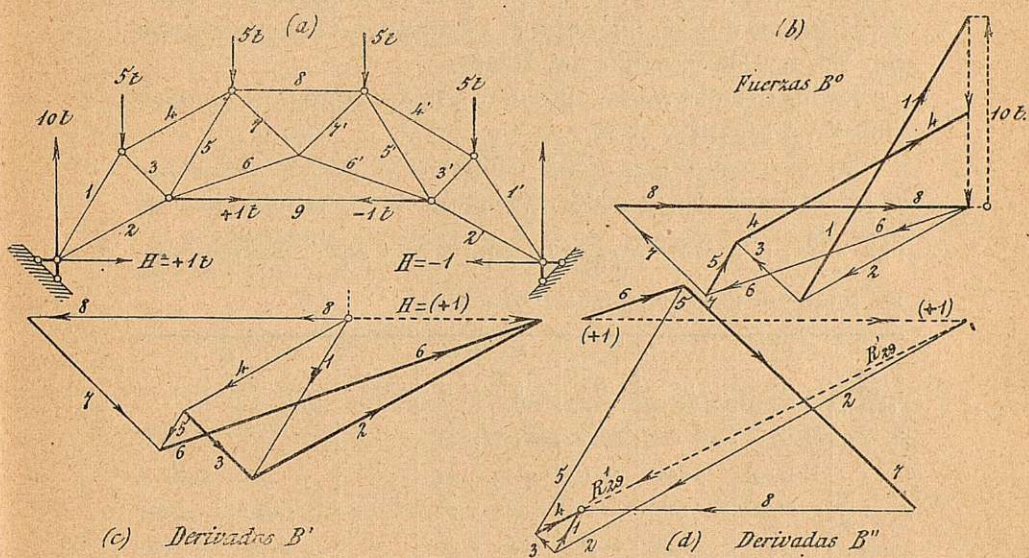


Fig. 30.

Volviendo al sistema, tal como aparece en la figura, la supresión del tirante 9 y del empuje ó reacción horizontal H de la sustentación izquierda, lo hacen isostático. Un primer polígono de Maxwell (fig. 30 b), da las fuerzas totales en las barras, B^0 , bajo la acción de los cuatro pesos de 5 toneladas cada uno.

Aplicada al nudo (1-2) $H = 1$ tonelada, considerada positiva en ese sentido, el equilibrio, que implica necesariamente una reacción igual y contraria en la articulación derecha, da en otro Maxwell (fig. 30, c)—que por claridad está en escala diez veces

mayor que (b)—, las derivadas B' correspondientes á la indeterminada $Y' = H$.

Una tensión de una tonelada en el tirante 9 *equivale* á las dos fuerzas ± 1 en sus extremos (fig. 30 a), que son las reacciones ejercidas por el tirante sobre el entramado. La ecuación de momentos alrededor del nudo (2-9) da las componentes H_1 , V_1 de la reacción total que allí se desarrolla en el conjunto simétrico (*)

$$+ V_1 \times 1 - H_1 \times \frac{1}{2} = 0 ; H_1 = -1 \text{ ton.} ; V_1 = -\frac{1}{2} \text{ ton.}$$

En el diagrama (fig. 30 d), en escala doble que en (c) y veinte veces mayor que en (b) resultan las derivadas B'' correlativas con Y'' , tensión incógnita del tirante.

En los tres diagramas figuran con líneas gruesas las compresiones ó B negativas.

En el cuadro que sigue reunimos todos los elementos: B^0 , B' , B'' derivadas parciales; b , longitudes; S , secciones (en cm^2); $r = \frac{S_a}{S}$, relaciones para cada lado; brB' y brB'' , multiplicadores totales de la expresión de B en (77).

Número de orden.	B^0	B'	B''	b	S	$r = \frac{S_a}{S}$	$b \times r \times B'$	$b \times r \times B''$
1	-17,500	+1,000	-0,133	5,00	40	1	+ 5,000	- 0,666
2	+10,000	-1,750	+1,225	5,00	20	2	-17,500	+12,250
3	+ 4,500	-0,500	+0,083	2,50	10	4	- 5,000	+ 0,833
4	-13,750	+1,000	-0,133	5,00	40	1	+ 5,000	- 0,666
5	- 3,333	+0,250	+0,750	5,00	20	2	+ 2,500	+ 7,500
6	+14,000	-2,100	-0,280	5,33	20	2	-22,400	- 3,000
7	+ 6,666	-1,000	-0,866	3,66	10	4	-13,666	-12,700
8	-18,333	+1,666	+0,866	5,00	40	1	+ 8,333	+ 4,333
							+ 4,166	+ 2,166

Como la estructura, simétrica, está simétricamente cargada, basta considerar la mitad, es decir, las barras 1 á 7 y *la mitad*

(*) Las dimensiones é inclinaciones de los lados las hemos escogido de modo que, en general, resulten valores y relaciones muy sencillas.

de la 8, cuyos multiplicadores aparecen por duplicado con los valores totales y mitades. La suma de polinomios

$$\begin{aligned}
 &+ 5,000 \left\{ -17,500 + 1,000 Y' - 0,133 Y'' \right\} + \\
 &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &+ 4,166 \left\{ -18,333 + 1,666 Y' + 0,866 Y'' \right\}
 \end{aligned}$$

igualada á *la mitad* del producto $ES_a \times y'$, si la distancia entre sustentaciones puede variar en total $2 y'$, que, en general, será cero, da la primera ecuación, y la segunda procede de la suma homóloga:

$$\begin{aligned}
 &- 0,666 \left\{ -17,500 + 1,000 Y' - 0,133 Y'' \right\} + \\
 &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &+ 2,166 \left\{ -18,133 + 1,666 Y' + 0,866 Y'' \right\}
 \end{aligned}$$

igualada á la mitad de $ES_a \times y''$.

y'' , recorrido del extremo (2-6) del tirante 9 es la mitad de su variación total de longitud; por tanto:

$$\frac{1}{2} ES_a y'' = \frac{1}{2} ES_a \times \frac{1}{2} Y'' \frac{l_9}{ES_9} = \frac{1}{4} r_9 l_9 Y''$$

Si juntamente hubiera una serie de variaciones lineales $\lambda_1 = \delta t_1$; $\lambda_2 = \delta t_2$ añadiríamos en las dos ecuaciones (I) y (II):

A los primeros miembros las sumas respectivas:

$$\left\{ B'_1 \lambda_1 b_1 + B'_2 \lambda_2 b_2 + \dots + \frac{1}{2} B'_8 \lambda_8 b_8 \right\} \times ES_a \quad (I)$$

$$\left\{ B''_1 \lambda_1 b_1 + B''_2 \lambda_2 b_2 + \dots + \frac{1}{2} B''_8 \lambda_8 b_8 \right\} \times ES_a \quad (II)$$

y á los segundos, correlativamente:

$\frac{1}{2} ES_a \times \frac{1}{2} \lambda' L'$ si la distancia entre sustentaciones, L' , está sujeta á una variación λ' ; (I)

$\frac{1}{2} ES_a \times \frac{1}{2} \lambda_9 l_9$, si el tirante de largo l_9 sufre λ_9 (II)

Si las cargas no fueran simétricas, sería menester construir $B^0 B' B''$ para las 15 barras 1 2 7 8 7' 2' 1', y todas las



operaciones se complicarían más aún. La investigación de los máximos efectos de un tren de fuerzas móvil á lo largo del arco sería prácticamente inabordable, no por causa del método, repetimos, sino por la naturaleza de los sistemas articulados. Todo lo que prácticamente se puede admitir en ellos es la indeterminación de primer grado, correspondiente á los arcos en celosía articulados en los arranques. La superabundancia complica, tan extraordinaria como inútilmente, los sistemas.

El arco en celosía, empotrado en los arranques, con triple indeterminación hiperestática, se puede y se debe tratar por el procedimiento ya expuesto de Müller Breslau, perfectamente aplicable sin más que sustituir, por sumas finitas, las integrales de áreas de momentos y de momentos estáticos de las mismas. Las tres indeterminadas X Y Z , directamente calculables para cada una de las fuerzas exteriores, dan todos los elementos de las líneas de influencia con las que, fácilmente, se computa el efecto de un tren de fuerzas y se investigan los máximos posibles de momentos y esfuerzos cortantes. Y por los métodos de Culmaun ó de Ritter, de esos máximos se deducen los de los esfuerzos en cada barra.



VIII

Aplicación á las líneas de influencia.

Conocido es este poderoso medio de cálculo, por fortuna bastante difundido, aunque nunca tanto como debiera. Lo que resulta casi ignorado es su origen, pura y exclusivamente debido á la única verdadera fuente, al principio del trabajo elástico, del que Mohr lo derivó en 1868, para aplicarlo poco después al cálculo de reacciones indeterminadas y de fuerzas superabundantes.

La base fundamental de las líneas de influencia es la reciprocidad de las deformaciones, ó teorema de Maxwell, que ya hemos visto con qué facilidad se deduce de los teoremas del trabajo.

La deformación total en un punto p debida á un tren de fuerzas, de valores $A_1 A_2 \dots A_n$, aplicadas á los puntos 1, 2, n , es, según la expresión general (12), prescindiendo del factor unidad, es decir, pasando de la igualdad entre trabajos á la igualdad entre recorridos total y parciales:

$$a_{p(123\dots n)} = a_{p1}^1 \times A_1 + a_{p2}^1 \times A_2 + \dots + a_{pn}^1 \times A_n$$

y como, según el teorema de Maxwell,

$$a_{pq}^1 = a_{qp}^1$$

podemos, permutando el orden de todos los subíndices, escribir:

$$a_{(123\dots n)p} = a_{1p}^1 \times A_1 + a_{2p}^1 \times A_2 + \dots + a_{np}^1 \times A_n \quad (79)$$



Recordemos que prescindir de la unidad equivale á considerar, no las acciones propiamente dichas, A , sino sus *valores numéricos*

$$\frac{A \text{ unidades}}{1 \text{ unidad}}$$

Todas las deformaciones unitarias a_{kp}^1 que intervienen en esta expresión son las producidas en los puntos $1 \ 2 \ \dots \ k \ \dots \ n$ por la unidad actuante en p , y, como hemos visto en el ejemplo 14.º, basta una sola elástica, la relativa á la unidad aplicada en p , para obtener todos esos valores, cuyas sumas de productos dan el recorrido total $a_{(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n) p}$

Nos remitimos á lo ya dicho en ese ejemplo respecto á la determinación, analítica ó gráfica, escalas de representación, etc., de la elástica producida por la unidad de fuerza.

Si p es el punto de aplicación de una indeterminada, de valor Y , (H ó V) su recorrido es la deformación unitaria a_{pp} medida en el mismo punto y en la misma elástica, multiplicada por el valor de Y . Si dicho recorrido, por las condiciones de la sustentación es nulo, ó una función de Y , la ecuación

$$a_{(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n) p} + a_{pp} \times Y = y = \begin{cases} 0 \\ \varphi(Y) \end{cases} \quad (80)$$

da el valor de Y originado por el tren de fuerzas $A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n$.

La elástica (p) es la línea de influencia de la indeterminada Y : cualquiera que sea la composición y distribución del tren de fuerzas, con aquella línea tendremos siempre el valor correlativo de la reacción Y , sin más que medir las ordenadas a_{kp} , hacer la suma $\sum_1^n a_{kp} \times A_k$ y resolver la ecuación (80).

En el caso más general y es prácticamente nulo y la expresión se simplifica:

$$Y = - \frac{a_{(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n) p}}{a_{pp}} = - \frac{\sum a_{kp}}{a_{pp}} \quad (81)$$

expresión independiente de la escala de representación ó de la distancia polar de la elástica (p).



Reproduciendo la elástica (p) con ordenadas reducidas, tomando a_{pp} por unidad, ó ($a_{kp} : a_{pp} = \rho_k$) la línea representativa de ρ da por simple suma el valor de $Y = - \sum_1^n \rho_k$. El signo, que así resulta manifiesto, corresponde al sentido de Y opuesto al de las A .

Si hay varios apoyos p, q, r, \dots con otras tantas reacciones indeterminadas, las elásticas (p) (q) (r) dan para cada posición del tren tantas ecuaciones como incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{p(12 \dots n)} + a_{pp} \times Y^{(p)} + a_{pq} \times Y^{(q)} + a_{pr} \times Y^{(r)} + \dots &= 0 \\ a_{q(12 \dots n)} + a_{qp} \times Y^{(p)} + a_{qq} \times Y^{(q)} + a_{qr} \times Y^{(r)} + \dots &= 0 \\ a_{r(12 \dots n)} + a_{rp} \times Y^{(p)} + a_{rq} \times Y^{(q)} + a_{rr} \times Y^{(r)} + \dots &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Reduciendo el tren á una sola fuerza en el punto 1, de abscisa i y permutando todos los subíndices:

$$\left. \begin{aligned} a_{1p} + a_{pp} \times Y^{(p)} + a_{qp} \times Y^{(q)} + a_{rp} \times Y^{(r)} + \dots &= 0 \quad (p) \\ a_{1q} + a_{pq} \times Y^{(p)} + a_{qq} \times Y^{(q)} + a_{qr} \times Y^{(r)} + \dots &= 0 \quad (q) \\ a_{1r} + a_{pr} \times Y^{(p)} + a_{qr} \times Y^{(q)} + a_{rr} \times Y^{(r)} + \dots &= 0 \quad (r) \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Los valores de las a de cada ecuación están dados por la elástica correspondiente al segundo subíndice: los que son coeficientes de las Y sólo dependen de las posiciones de los apoyos p, q, r, \dots , y son constantes. Resuelto el sistema, quedan las ecuaciones de cada indeterminada en función de aquellas a constantes y de a_{1p}, a_{1q}, a_{1r} , que son funciones de la única variable independiente, la abscisa i del punto 1. Así, pues,

$$Y^{(p)} = f(i) \quad ; \quad Y^{(q)} = \varphi(i) \quad ; \quad Y^{(r)} = \psi(i) \quad \dots$$

son las ecuaciones de las líneas de influencia respectivas á cada sustentación.

Claro es que cuando hay más de dos indeterminadas, el cálculo se hace laborioso. Pero, repetimos, se alcanza cuanta

exactitud es posible conseguir, teniendo en cuenta las variaciones de momento de inercia de la pieza y las desnivelaciones por asiento preexistente ó por deformación elástica de los apoyos.

Ejemplo décimoséptimo.

Terminaremos este estudio con un ejemplo que podrá ser de inmediata utilidad práctica: el cálculo de un puente de arco empujado (ó articulado), en sus arranques, por medio de las líneas de influencia de sus tres (ó una) indeterminadas m , H , V (ó H solamente).

En los arcos bastante ó muy rebajados, en los que la relación ($f : l$) es igual ó menor que $\frac{1}{6}$, la sección y momento de inercia son en la práctica ó bien proporcionales á

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{\cos \tau}$$

inversa del coseno de la inclinación del elemento dl sobre la horizontal, τ (fig. 31), ó bien constantes.

Adoptaremos la primera forma, que es la más racional: en función de los valores en la clave, S_c é I_c , en un punto cualquiera tendremos:

$$S = S_c \frac{dl}{dx} = \frac{S_c}{\cos \tau} ; \quad I = I_c \frac{dl}{dx} = \frac{I_c}{\cos \tau} \quad (83)$$

Cuanto mayor es el rebajamiento menor es la diferencia entre el arco circular, el catenario y el parabólico, más racional y usado este último, que es el que adoptaremos, definiéndolo por la ecuación:

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x) \quad (84)$$

referida á la cuerda (arco simétrico) y á la normal á ella en el arranque izquierdo.

Para un sólo peso P , que actúe en la abscisa i , considerando además, en general, una variación de longitud λ , uniforme en todo el arco, la expresión general del recorrido de una reacción

$$\int_0^1 \frac{M}{EI} \frac{dM}{dR} dl + \int_0^1 \frac{N}{ES} \frac{dN}{dR} dl + \int_0^1 \frac{dN}{dR} \lambda dl = p_R \quad (85)$$



aplicada á las tres, m , H , V , de la sustentación izquierda y para $\rho_R = 0$, nos dará los valores de las tres indeterminadas en

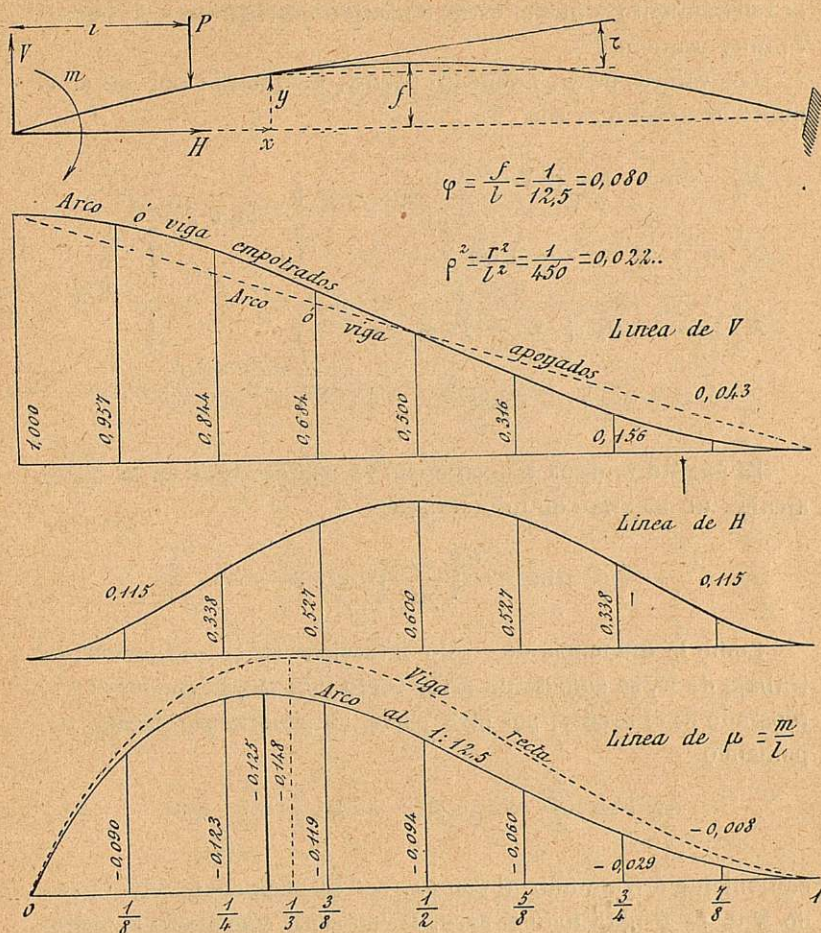


Fig. 31.

función de la única variable independiente, i , que define la posición de P y del parámetro λ .

Con los valores de I y de S , (85) resulta:

$$\frac{1}{EI_c} \int_0^1 M \frac{dM}{dR} dx + \frac{1}{ES_c} \int_0^1 N \frac{dN}{dR} dx + \lambda \int_0^1 \frac{dN}{dR} dl = 0 \quad (86)$$

Salvo en el término relativo á la variación λ , ha desaparecido el elemento del arco dl , al que reemplaza dx . Sabido es, por otra parte, que la diferencia ($dl - dx$) es tanto menor cuanto mayor es el rebajamiento y que el error cometido sustituyendo dl por dx es muy pequeño (*).

Los valores de M , momento flector, y N , fuerza normal en el punto de abscisa x , son

$$\left. \begin{aligned} M_o^i &= m - Hy + Vx \\ N_o^i &= -H \cos \tau - V \sin \tau \\ M_i^1 &= m - Hy + Vx - Px + Pi \\ N_i^1 &= -H \cos \tau - V \sin \tau + P \sin \tau \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x \text{ de } 0 \text{ á } i \\ x \text{ de } i \text{ á } l \end{array} \quad (87)$$

El ángulo τ , de la tangente con la cuerda, nulo en la clave, alcanza un máximo en los arranques

$$\text{tang } \tau = \left(\frac{dy}{dx} \right)_o = 4 \frac{f}{l}$$

Como la influencia de τ solo interviene en la evaluación del trabajo de N , se comete un error tanto más pequeño cuanto más rebajado es el arco y, por otra parte, en general *por exceso*, suponiendo

$$\cos \tau = \frac{dx}{dl} = \dots 1 \quad ; \quad \sin \tau = \dots 0$$

equivalente á confundir dl con dx . Así se hace siempre, tomando $N = -H$ para todo el arco. Dicho error sólo afecta al térmi-

(*) Si el arco es de sección constante, se admite la sustitución de dl por dx como aproximación para valuar los efectos de M , N . De otro modo resultan expresiones complicadísimas que difieren de las aproximadas en cantidades insignificantes. Los errores relativos así cometidos respecto al empuje H y al empotramiento m son de 0,0180 y 0,0605 para el rebajamiento $\varphi = \frac{f}{l} = \frac{1}{4}$; de 0,0042 y 0,0141 para $\varphi = \frac{1}{5}$ y completamente despreciables para $\varphi < \frac{1}{6}$ (Belliard, Mémoire sur l'encastrement des arcs. *Anales de Puentes y Calzadas*, 1895).



no en N . En el relativo á λ ya veremos que la evaluación se hace exactamente.

Para la nulidad del recorrido de m , multiplicando (86) por la constante EI_c , sustituyendo el valor (84) de y , resulta:

$$\frac{dM}{dm} = +1 \quad ; \quad \frac{dN}{dm} = 0$$

$$\int_0^1 (m - Hy + Vx) dx + \int_1^l (Pi - Px) dx = 0$$

$$lm - \frac{2}{3} l f H + \frac{l^2}{2} V - \frac{(l-i)^2}{2} P = 0 \quad (A)$$

Del mismo modo, para la nulidad del recorrido de H :

$$\frac{dM}{dH} = -y = -\frac{4f}{l^2} x (l-x) \quad ; \quad \frac{dN}{dH} = -\cos \tau \quad (*)$$

$$\int_0^1 (m - Hy + Vx) \times \frac{4f}{l^2} x (x-l) dx +$$

$$+ \int_1^l (Pi - Px) \times \frac{4f}{l^2} x (x-l) dx +$$

$$+ \frac{I_c}{S_c} \int_0^1 H dx - EI_c \lambda \int_0^1 \cos \tau dl$$

se obtiene, observando que $\cos \tau dl = dx$:

$$-\frac{2}{3} l f m + \frac{8}{15} l f^2 H - \frac{1}{3} l^2 f V + \frac{I_c}{S_c} l H - EI_c \lambda l +$$

$$+ \frac{1}{3} l^2 f P \left\{ 1 - 2 \frac{i}{l} + 2 \frac{i^2}{l^2} - \frac{i^4}{l^4} \right\} = 0 \quad (B)$$

(*) Valor exacto, aplicable al término en λ . Para el relativo á N se toma el valor aproximado $\frac{dN}{dH} = -1$.

Y, finalmente, resulta de la nulidad del recorrido de V :

$$\frac{dM}{dV} = +x \quad ; \quad \frac{dN}{dV} = -\operatorname{sen} \tau \quad (*)$$

$$\int_0^1 (m - Hy + Vx) x dx + \\ + \int_i^1 (Pi - Px) x dx - EI_c \lambda \int_0^1 \operatorname{sen} \tau dl = 0$$

Pero como:

$$\operatorname{sen} \tau dl = dy \quad ; \quad \int_0^1 dy = \frac{4f}{l^2} \int_0^1 (l - 2x) dx = 0$$

resulta integrando:

$$\frac{1}{2} l^2 m - \frac{1}{3} l^2 fH + \\ \frac{1}{3} l^3 V - \frac{1}{6} l^3 P \left\{ 2 - 3 \frac{i}{l} + \frac{i^3}{l^3} \right\} = 0 \quad (C)$$

Tomemos por unidad la luz l , refiriendo á ella las demás dimensiones, y hagamos:

El rebajamiento unitario..... $\frac{f}{l} = \varphi$

La relación del radio de giro $r = \sqrt{\frac{I_0}{S_0}}$ á la luz. $\frac{r}{l} = \rho$

El momento de empotramiento por unidad de luz.... $\frac{m}{l} = \mu$

La relación de la abscisa i á la luz, l $\frac{i}{l} = \xi$

(*) Valor exacto, aplicable al efecto de λ . Valor aproximado, $\frac{dN}{dV} = 0$, para lo tocante á N .

Los elementos φ , ρ , ξ son *números abstractos* y las tres ecuaciones simplificadas toman la forma, prescindiendo por ahora del término relativo á λ :

$$\left. \begin{aligned} 6 \times \mu - 4 \varphi \times H + 3 \times V &= 3 P \{ 1 - 2\xi + \xi^2 \} \\ 10 \varphi \times \mu - (8 \varphi^2 + 15 \rho^2) \times H + 5 \varphi \times V &= 5 \varphi P \{ 1 - 2\xi + 2\xi^2 - \xi^3 \} \\ 3 \times \mu - 2 \varphi \times H + 2 \times V &= P \{ 2 - 3\xi + \xi^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Este sistema se resuelve fácilmente; las ecuaciones I y III dan desde luego:

$$V = P \{ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \} \quad (v)$$

que para P igual á la unidad es la línea de influencia de la reacción vertical. Se comprueba desde luego que para $\xi = 0$, $V = P$; para $\xi = 1$, $V = 0$. y para $\xi = \frac{1}{2}$, $V = \frac{1}{2} P$, y siempre V tiene el valor correspondiente á la pieza recta empotrada en sus extremos.

Sustituído V en I y II resultan:

$$\left. \begin{aligned} 3 \mu - 2 \varphi H &= 3 P \{ -\xi + 2\xi^2 - \xi^3 \} \\ 10 \varphi \mu - (8 \varphi^2 + 15 \rho^2) H &= 5 \varphi P \{ -2\xi + 3\xi^2 - \xi^3 \} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

de las que obtenemos:

$$H = P \frac{\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \times 15 \varphi \quad (h)$$

$$\mu = \frac{m}{l} = P \frac{\varphi^2 \{ -4\xi + 18\xi^2 - 24\xi^3 + 10\xi^4 \} - 45 \rho^2 \{ \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \}}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \quad (m)$$

Las ecuaciones (h) y (m) son, para $P = 1$, las de las líneas de influencia del empuje y del momento de empotramiento.

Se comprueba inmediatamente que

$$\text{para } \xi = 0, H = 0, m = 0$$

$$\text{para } \xi = 1, H = 0, m = 0$$

y que si la parábola degenera en recta ($\varphi = 0$), H es nula y $m =$



$l \mu$, es el momento en la sustentación izquierda de la pieza recta empotrada

$$m = -\xi (1 - \xi)^2 \times Pl = -\frac{P}{l^2} i (l - i)^2$$

La línea (v), de tercer grado, es puramente *geométrica*: la reacción vertical sólo depende de $\xi = \frac{i}{l}$, y no cambia con el re-

bajamiento $\varphi = \frac{f}{l}$.

Las líneas (h) y (m), ambas de cuarto grado, son *geométricas y elásticas*: intervienen no sólo ξ y φ , sino la *característica de rigidez* del arco

$$\rho^2 = \frac{r^2}{l^2} = \frac{I}{S} \times \frac{1}{l^2}$$

que afecta en las ecuaciones fundamentales al único término representativo del trabajo de N , $\frac{I_c}{S_c} l H$ en la (B). Prescindir de éste ó de los términos en ρ^2 implica un error, inadmisible cuando $\varphi < \frac{1}{8}$, pero que decrece rápidamente cuando aumenta φ y

para rebajamientos de $\frac{1}{4}$ á $\frac{1}{2}$ es pequeñísimo.

En la figura 31 están las tres líneas representadas para un rebajamiento $\varphi = 0,08 = \frac{1}{12,5}$ y un radio unitario ρ convencional, que por sencillez hemos supuesto $\rho^2 = \frac{1}{45} \times \frac{1}{10} = 0,0022$

Resulta así el denominador:

$$45 \rho^2 + 4 \varphi^2 = 0,1 + 4 \times 0,08^2 = 0,1256$$

Los máximos de V y de H corresponden respectivamente á $\xi = 0$ y $\xi = 0,5$; el de μ ó de m depende de ρ y de φ : en el caso supuesto corresponde sensiblemente á $\xi = 0,30$. Sabido es que en la viga empotrada:

$$\varphi = 0 \quad ; \quad \mu = - \left\{ \xi - 2 \xi^2 + \xi^3 \right\} P$$

el máximo corresponde á $\xi = \frac{1}{3} = 0,333$ y vale $\frac{4}{27} = 0,148$, mientras que en el arco ($\varphi = 0,08$) sólo alcanza 0,125.

Tengamos ahora en cuenta la variación de volumen, que como no depende de condición geométrica ó posición de la causa, no da lugar á línea de influencia. El término $-EI_c \lambda l$ de la ecuación (B) conduce, con las mismas simplificaciones y para $P = 0$, á

$$\left. \begin{aligned} 6 \times \mu - 4 \varphi \times H + 3 \times V &= 0 \\ 10 \varphi \times \mu - (8 \varphi^2 + 15 \rho^2) \times H + 5 \varphi \times V &= -15 EI_c \lambda \times \frac{1}{l^2} \\ 3 \times \mu - 2 \varphi \times H + 2 \times V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} V &= 0 & (vt) \\ H &= \frac{45 EI_c \lambda}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \times \frac{1}{l^2} = \frac{45 EI_c \lambda}{45 r^2 + 4 f^2} & (ht) \\ l \mu = m &= \frac{30 EI_c \lambda}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \varphi \times \frac{1}{l} = \frac{30 EI_c \lambda}{45 r^2 + 4 f^2} f & (mt) \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

valores que para $\varphi = 0$ dan únicamente

$$H = \frac{EI_c}{\rho^2} \times \frac{\lambda}{l^2} = \frac{EI_c}{r^2} \lambda = ES_c \times \lambda$$

fuerza normal en la pieza recta cuyos extremos no ceden, coartando en absoluto la variación lineal λ .

Invitamos al lector á que pase la vista por los cálculos del arco empotrado hechos por los métodos usuales, bien en las obras de Bresse, Résal, etc., bien en los estudios especialmente dedicados al problema en los *Anales de Puentes y Calzadas*, por Collignon (1890), Belliard (1893-4), Souleyre (1895), Boulongne (1902), Pigeaud (1905-6) y aun en los métodos más modernos de Ritter, Weyrauch, etc. Compare los laboriosísimos cálculos allí desarrollados con el que acabamos de exponer (*) y resaltará ante su ánimo la aplastante superioridad del método del trabajo elástico

(*) Hecho por nosotros (en esta forma no lo trata ninguno de los autores alemanes ni yanquis que conocemos) en tres horas, *repetiendo* por separado todas las integraciones, para comprobar si había algún error numérico ó de signo. Castigliano opera de un modo bastante más pesado y no tan general como el nuestro.



sobre los usuales. Y, sin embargo, el planteo del problema es idéntico: igualar á cero los, para nosotros, *recorridos* de las reacciones izquierdas, que para los autores citados son las *variaciones* Δx , Δy , de las coordenadas y $\Delta \theta$ del ángulo de orientación de la sección extrema. Pero de expresar esas variaciones ó recorridos en función del trabajo elástico, derivando la expresión de éste, á valorarlas por los métodos usuales, la diferencia en facilidad y en tiempo es enorme.

Résal consigna en sus Puentes metálicos que para calcular el célebre de San Luis, resolvieron sus autores para cada combinación de sobrecargas VEINTISIETE ecuaciones diferenciales simultáneas!!

El mismo Résal estudia en su Estabilidad de las construcciones el arco especial, *pórtico*, de nuestro ejemplo quinto. Aunque desde luego lo simplifica, tomando pilares de igual altura y limitándose á considerar una sobrecarga uniforme en la viga, no necesita menos de TRECE ecuaciones para plantear un problema que hemos resuelto, para cualquier combinación de sobrecargas verticales, horizontales y para variaciones de volumen, solamente con TRES de aquéllas!!

En cuanto á los métodos gráficos, excelentes, á nuestro modo de ver, como medios de representación ó auxiliares, nada digamos: aun con los más sencillos, la construcción de cinco funiculares, los tanteos respecto á las bases de reducción, escalas, distancias polares, posiciones más convenientes, etc., y el no dar con regular exactitud más que lo relativo á fuerzas aisladas, hacen dichos métodos muy inferiores, por todos conceptos, al desarrollado. El cálculo, ó la construcción, del recorrido de un extremo del arco, como rotación alrededor del antipolo de la fuerza que lo produce, es, como el método de la elipse central, sumamente penoso.

Las tres ecuaciones (v), (h), (m), relativas á una fuerza aislada, sobre darnos las tres líneas de influencia y con ellas deducir por simples sumas los valores de V , H , m , producidos por cualquier tren de fuerzas móviles, resuelven el problema para cualquier clase de sobrecarga.

Haciendo $P = c\delta i = c\delta \cdot d\xi$ é integrando, resultan las siguientes expresiones generales, en función de la abscisa unitaria ξ , para $c = \text{constante}$.



$$\left. \begin{aligned} V &= cl \times \left\{ \xi - \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^4 \right\} \\ H &= \frac{cf}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \left\{ 5 \xi^3 - \frac{15}{2} \xi^4 + 3 \xi^5 \right\} \\ m &= \frac{cl}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \times \left[\varphi^2 \left\{ -2 \xi^2 + 6 \xi^3 - 6 \xi^4 + 2 \xi^5 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 45 \rho^2 \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{1}{4} \xi^4 \right\} \right] \end{aligned} \right\} (92)$$

La carga uniforme en toda la luz da, de $\xi = 0$ á $\xi = 1$ y haciendo para simplificar la constante

$$45 \rho^2 + 4 \varphi^2 = \Delta$$

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \times cl \\ H &= \frac{c}{\Delta} \times \frac{1}{2} f \\ m &= \frac{c}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \times (0) - 45 \rho^2 \times \frac{1}{12} \right\} l \end{aligned} \right\} (93)$$

Esta expresión de m hace palpable el error que se cometería al prescindir del trabajo de N , es decir, del término en ρ^2 : el primero, debido á la flexión, es, como en un arco parabólico precisa, nulo.

La misma carga en media luz, de $\xi = 0$ á $\xi = \frac{1}{2}$ da:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{13}{32} \times cl \\ H &= \frac{c}{\Delta} \times \frac{1}{4} f \\ m &= \frac{c}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \times \left(-\frac{1}{16} \right) - 45 \rho^2 \times \left(\frac{11}{192} \right) \right\} l \end{aligned} \right\} (94)$$

Una carga uniforme en la región central, desde ξ hasta $(1 - \xi)$, produce

$$\left. \begin{aligned} V &= cl \times \left\{ \frac{1}{2} - \xi \right\} \\ H &= \frac{c}{\Delta} \times \left\{ \frac{1}{2} - 10 \xi^3 + \frac{15}{16} \xi^4 - \frac{3}{16} \xi^5 \right\} f \\ m &= \frac{c}{\Delta} \left[\varphi^2 \left\{ 2 \xi^2 - 8 \xi^3 + 10 \xi^4 - 4 \xi^5 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 45 \rho^2 \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^3 \right\} \right] l \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Puede convenir, para el caso poco usual de tímpanos corridos, conocer el efecto de su peso, que corresponde á una carga t variable según dos triángulos parabólicos:

$$tdi = c' \left[1 - \frac{4f}{l^2} i(l-i) \right] di = c' \left[1 - 4f(\xi - \xi^2) \right] \times l d\xi \quad (96)$$

desde $t = c' = kf$ kg.:m. l. en el arranque, hasta cero en la clave. para crecer nuevamente hasta t en el otro arranque. La obtendremos, por simple resta.

Para la carga sustraendo $4f(\xi - \xi^2)$, la integración de (h) y (m) da (de $\xi = 0$ á $\xi = 1$),

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{c'}{\Delta} \times \frac{3}{7} f \\ m &= \frac{c'}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \left(\frac{2}{105} \right) - 45 \rho^2 \left(\frac{1}{15} \right) \right\} l \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Las reacciones debidas á los tímpanos son las diferencias entre (93) y (97) y para V la mitad del peso total $\frac{1}{3} c'l$.

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \times c'l \\ H &= \frac{c'}{\Delta} \times \frac{1}{14} f \\ m &= \frac{c'}{\Delta} \times \left\{ \varphi^2 \left(-\frac{2}{105} \right) - 45 \rho^2 \left(-\frac{3}{320} \right) \right\} l \end{aligned} \right\} \quad (98)$$



El empuje y momento son en este caso relativamente pequeños, por acumularse la mayor parte de la carga en las zonas extremas.

El arco articulado, degeneración del empotrado cuando por las condiciones de sustentación es m de suyo nulo, se obtiene sencillísimamente. La única indeterminada es la reacción horizontal H : la vertical es, como en la pieza recta apoyada,

$$V = P \frac{l-i}{l} = P(1 - \xi)$$

Sustituído este valor en la derivada del trabajo elástico respecto á H , es decir, en la segunda ecuación de las (82) y anulando μ resulta:

$$H = 5 P \frac{\xi - 2\xi^3 + \xi^4}{8\varphi^2 + 15\rho^2} \varphi \quad (99)$$

Para el empuje debido á la variación λ subsiste la misma expresión, segunda de las ecuaciones (90), anulado el término en m , que da:

$$H = \frac{15 EI_c \lambda}{8\varphi^2 + 15\rho^2} \times \frac{1}{l^2} = \frac{15 EI_c \lambda}{15r^2 + 8f^2} \quad (h't) \quad (100)$$

De (99), línea de influencia del empuje cuando $P = 1$, se deducen como antes, haciendo $P = cdi = cl d\xi$ é integrando, los valores de H relativos á sobrecarga constante en toda ó parte de la luz, cuya expresión general es:

$$H = \frac{5cf}{8\varphi^2 + 15\rho^2} \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{2}{4} \xi^4 + \frac{1}{5} \xi^5 \right\} \quad (101)$$

La carga total da, haciendo para abreviar $D = 8\varphi^2 + 15\rho^2$:

$$H = \frac{cf}{D} \quad (102)$$

que, cuando ρ^2 es despreciable, ó lo que es igual, r muy pequeño comparado con l , degenera en la conocida expresión aproxi-

mada $\frac{cl^2}{8f}$



La carga en media luz produce:

$$H = \frac{1}{2} \frac{cf}{D} \quad (103)$$

y, si afecta á la región central, desde ξ hasta $(1 - \xi)$:

$$H = \frac{cf}{D} \left\{ 1 - 5\xi^2 + 5\xi^4 - 2\xi^5 \right\} \quad (104)$$

Por último, la carga triangular parabólica correspondiente á los tímpanos corridos, origina, procediendo como en el caso general:

$$H = \frac{cf}{D} \left\{ 1 - \frac{17}{21} \right\} = \frac{4}{21} \frac{cf}{D} \quad (105)$$

Como se ve, no cabe mayor sencillez en la resolución de problemas harto difíciles para los métodos ordinarios.

El caso del arco de flecha bastante ó muy grande, $\varphi > \frac{1}{6}$

con sección y momento de inercia proporcionales á $\frac{dl}{dx}$ sólo difiere del ya tratado en que se puede prescindir, cometiendo ligerísimo error, del trabajo de las fuerzas normales N .

Las tres ecuaciones fundamentales resultan:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 M \frac{dM}{dm} dx + 0 &= 0 \\ \int_0^1 M \frac{dM}{dH} dx + 0 &= EI_c \lambda l \\ \int_0^1 M \frac{dM}{dV} dx + 0 &= EI_c \lambda \times \frac{4f}{l^2} \left(l^2 - 2 \frac{l^2}{2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Señalamos con ceros los términos en N despreciados. Resultan las mismas ecuaciones (88), salvo desaparecer en la segunda

el término en ρ^2 , que es precisamente el que valúa el efecto de N . Las líneas de influencia son, así, las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} V &= P \left\{ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \right\} & (v') \\ H &= P \frac{\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4}{4\varphi^2} \times 15\varphi & (h') \\ \mu = \frac{m}{l} &= P \frac{-4\xi + 18\xi^2 - 24\xi^3 + 10\xi^4}{4\varphi^2} & (m') \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

y las reacciones debidas á la variación λ :

$$\left. \begin{aligned} V &= 0 & (v't') \\ H &= \frac{45 EI_c \lambda}{4\varphi^2} \times \frac{1}{l^2} = \frac{45 EI_c \lambda}{4 f^2} & (h't') \\ l \mu = m &= \frac{30 EI_c \lambda}{4\varphi^2} \varphi \times \frac{1}{l} = \frac{30 EI_c \lambda}{4 f} & (m't') \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Todo se reduce, por tanto, á prescindir en los denominadores de $45\varphi^2$, dejándolos reducidos á $4\varphi^2$. En el arco estudiado, con rebajamiento de $\frac{1}{12,5}$ el error sería enorme, pues $45\varphi^2 = 0,1000$

es mucho mayor que $4\varphi^2 = 0,0256$. Pero en un arco al $\frac{1}{4}$ $4\varphi^2$ vale 0,2500 y el ρ^2 , entonces necesario, no tiene ya el valor supuesto, $\frac{1}{450}$, sino otro muchísimo menor, porque el momen-

to de inercia y la sección en la clave I_c , S_c , requeridos respectivamente por las máximas flexiones y compresiones en la región central, decrecen muchísimo para una misma luz al aumentar φ .

El caso más general del arco bastante peraltado y *por tranquil*, ó disimétrico, en que la luz es mayor que la cuerda horizontal, l , que con la flecha f define la parábola, se estudia con la misma facilidad: basta sustituir en los límites de las integrales l por la distancia horizontal entre arranques L .

Las tres ecuaciones fundamentales son:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L M \frac{dM}{dm} dx + 0 &= 0 \\ \int_0^L M \frac{dM}{dH} dx + 0 &= EI_c \lambda L \\ \int_0^L M \frac{dM}{dV} dx + 0 &= EI_c \lambda \times \frac{4f}{l^2} (lL - L^2) = \\ &= EI_c \lambda \times 4f \left(\frac{L}{l} - \frac{L^2}{l^2} \right) \end{aligned} \right\} (109)$$

Conservemos como medida del rebajamiento $\varphi = \frac{f}{l}$ y refiramos á la luz según la horizontal L , las abscisas i , el momento m y la cuerda l , haciendo:

$$\frac{m}{L} = \mathfrak{M} \quad ; \quad \frac{i}{L} = X \quad ; \quad \frac{l}{L} = \nu$$

Las ecuaciones fundamentales (109) dan, simplificadas y prescindiendo de lo relativo á λ , el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 6 \times \mathfrak{M} - (12 - 8\nu) \varphi \times H + 3 \times V &= 3P \{ 1 - 2X + X^2 \} \\ (30 - 20\nu) \varphi \times \mathfrak{M} - (80 - 120\nu + 48\nu^2) \varphi^2 \times H + (20 - 15\nu) \varphi \times V &= \\ = 5 \varphi P \{ 4 - 3\nu - (6 - 4\nu)X + 2X^2 - \nu X^3 \} \\ 3 \times \mathfrak{M} - (8 - 6\nu) \varphi \times H + 2 \times V &= P \{ 2 - 3X + X^3 \} \end{aligned} \right\} (110)$$

Se comprueba inmediatamente que para $L = l$, ó sea $\nu = 1$, el sistema (110) degenera en el (88) ya conocido, relativo al arco simétrico, caso particular del general que ahora tratamos. Sólo falta en (110) el término en φ^2 relativo á las acciones normales despreciadas.

La resolución algebraica del sistema no es ahora tan fácil; la reacción vertical no es ya independiente de los elementos característicos del arco, sino función de $\nu = \frac{L}{l}$.

$$V = P \{ 1 - 3X^2 + 2X^3 \} - 4(\nu - 1)H$$



Las expresiones de \mathfrak{N} , H , serían muy complicadas y no ofrecen interés. Aritméticamente, sustituidos los valores de ν y de φ , la resolución es facilísima y se obtienen las tres líneas de influencia y, si se quieren, los valores de \mathfrak{N} , H , V para cualquier sobrecarga constante ó variable, c , en todo ó en parte del arco, del modo tan sencillo ya expuesto.

La influencia de la variación de volumen λ se traduce por el sistema siguiente con los mismos primeros miembros (*) (I , \mathfrak{N}) (II , H) (III , V) de (110).

$$\left. \begin{aligned} (I, \mathfrak{N}) &= 0 \\ (II, H) &= -15 EI_c \lambda \times \frac{1}{L^2} \\ (III, V) &= 24 EI_c \lambda (1 - \nu) \times \frac{1}{L^2} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

que para $\nu = 1$ degenera en el (106), que resuelto, da los valores (108).

Por último, el cálculo de la deformación del arco en un punto cualquiera, se lleva á cabo con la rapidez y facilidad que ya conoce el lector por los ejemplos. Evaluados m , H , V por las sumas de los correspondientes á un tren de fuerzas móviles y á las cargas repartidas (tímpanos, peso muerto, firme ó vía, etc.), el momento flector M y la fuerza normal N son conocidos. Introduciendo en el punto de que se trate una acción unidad, las líneas de influencia dan inmediatamente m^1 , H^1 , V^1 , y por tanto, M_p^1 y N_p^1 que valúan directamente las derivadas parciales $\frac{dM}{dI}$, $\frac{dN}{dI}$ y la expresión de la derivada del trabajo elástico total,

$$\frac{1}{EI_c} \int_0^L M \times M_p^1 \times dx + \frac{1}{ES_c} \int_0^L N \times N_p^1 \times dx = \delta \quad (112)$$

es la deformación en el punto p buscada. En el ejemplo undécimo lo hemos hecho detalladamente, calculando la dilatación del faro según uno de sus diámetros.

(*) Primera ecuación, derivada respecto á \mathfrak{N} , etc., abreviaturas ya usadas en el ejemplo quinto.



Finalmente, si con toda la *generalidad* y *exactitud* posibles queremos calcular un arco por tranquilo de fibra neutra *cualquiera*, $y = \psi(x)$, cuyas secciones y momentos de inercia varíen, según *cualquier* ley, todo se reduce á evaluar las integrales comprendidas en el desarrollo de la ecuación fundamental (85) que son:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{I} dl \quad \int \frac{x}{I} dl \quad \int \frac{y}{I} dl \\ & \int \frac{xy}{I} dl \quad \int \frac{x^2}{I} dl \quad \int \frac{y^2}{I} dl \\ & \int \frac{\cos \tau}{S} dl \quad \int \frac{\text{sen } \tau}{S} dl \quad \int \frac{\text{sen } \tau \cos \tau}{S} dl \\ & \int \frac{\cos^2 \tau}{S} dl \quad \int \frac{\text{sen}^2 \tau}{S} dl \end{aligned}$$

Dividido el arco en trozos Δl , dentro de los cuales las variaciones de I, S, x, y, τ , no sean bruscas y adoptando para cada uno de aquellos los valores medios I', S', x', y', τ' (x' é y' corresponderán á la sección media dentro del elemento de fibra neutra Δl ; I, S, τ , serán las medias aritméticas de los valores en los extremos de Δl), formaremos tablas numéricas de las magnitudes.

$$\frac{\Delta l}{I'}, \quad \frac{x' \Delta l}{I'} \dots\dots \frac{y'^2 \Delta l}{I'}; \quad \frac{\cos \tau' \Delta l}{S'} \dots\dots \frac{\text{sen}^2 \tau' \Delta l}{S'}$$

cuyas sumas respectivas de cero á L y de i á L darán los coeficientes numéricos de las tres ecuaciones (A) (B) (C) que determinarán m, H, V .

Y si quisiéramos apurar la exactitud podríamos tener en cuenta hasta el trabajo de las fuerzas tangenciales, restableciendo en (85) el término

$$\times \int_0^L \frac{T}{E_t S} \frac{dT}{dR} dl$$

para lo cual habrá que calcular los coeficientes de forma \times é in-



troducir el valor de E_t en función de E . Los de T y sus derivadas son:

$$T_o^i = -H \operatorname{sen} \tau + V \cos \tau; T_i^L = -H \operatorname{sen} \tau + V \cos \tau - P \cos \tau$$

$$\frac{dT}{dm} = 0 \qquad \frac{dT}{dH} = -\operatorname{sen} \tau \qquad \frac{dT}{dV} = +\cos \tau$$

Como los coeficientes de forma κ serán en general variables con las secciones S , habrá que valorar las magnitudes

$$\frac{\kappa' \cos \tau' \Delta l}{S'} \qquad \frac{\kappa' \operatorname{sen}^2 \tau' \Delta l}{I}$$

y hacer las sumas correspondientes.

El conjunto de operaciones numéricas, aunque pesado, no ofrece dificultad alguna. Claro es que dentro de la formidable complicación supuesta, arco disimétrico de cualquier forma y cualquier ley de variación de secciones y momentos de inercia, sobrecarga disimétrica, efecto de las variaciones de volumen (*), todo ello teniendo en cuenta las acciones normales y aun las tangenciales....., no cabe obtener expresiones algebraicas, que den los valores generales de m , H , V , en función de la variable que define la posición de una fuerza móvil. Sólo se pueden calcular los valores particulares de m , H , V , correspondientes á cada fuerza ó grupo de fuerzas, variaciones de volumen, etc., es decir, á cada sistema de causas externas que se considere.

Hay que resolver otros tantos sistemas de tres ecuaciones. Pero simplifica muchísimo el problema ser *invariables* los coeficientes de m , H , V , funciones exclusivas de los elementos geométricos y mecánicos del arco é independientes en absoluto de las causas exteriores. Los primeros miembros de las ecuaciones son constantemente los mismos.

Ya lo hemos visto en los ejemplos quinto y sexto relativos á

(*) Podríamos suponerlas variables, introduciendo el término

$$\int \frac{dM}{dR} \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl,$$

que no requiere sino dos tablas más, de las magnitudes $\frac{x' \Delta l}{e'}$ $\frac{y' \Delta l}{e'}$

un pórtico, que no es sino un verdadero arco por tranquil, de fibra neutra quebrada, un caso particular, simplificado, del que ahora exponemos.

Volvemos á invitar al lector á que pase la vista por los tratados de Mecánica aplicada y á que compare los métodos clásicos con los derivados del trabajo elástico.



IX

Rectificaciones.

Por error de copia aparecen equivocados en la pág. 35 dos términos del trabajo elástico producido por variaciones de volumen.

A la fuerza normal N_t corresponden

$$\int N_t \times \frac{1}{2} \frac{N_t}{ES} dl + \int N_t \times \lambda_0 dl$$

y al momento flector M_t

$$\int M_t \times \frac{1}{2} \frac{M_t}{EI} dl + \int M_t \times \frac{\lambda_s - \lambda_i}{e} dl$$

Los recorridos elementales originados por la compresión y flexión directas se desarrollan gradualmente a compás de N y M é implican el factor $\frac{1}{2}$. Los recorridos correspondientes á las variaciones λ , se producen por causa independiente y son constantes durante el crecimiento gradual de N y M .

Una momentánea obcecación nos ha hecho incurrir en un error, difícilmente explicable, que rectificamos en lo que sigue.

Es el trabajo elástico TOTAL $(\mathfrak{F})_0^1$, desarrollado en la longitud, l , del sólido *entero* y no el trabajo *parcial* correspondiente al



trozo $l_p (\mathfrak{F})_0^{lp}$, la función de las *causas exteriores*, $\Sigma A + \Sigma R$, cuyas derivadas parciales respecto á cualquiera de ellas, C_p , miden los recorridos correspondientes $(\rho)_p$.

Así, pues, todos los límites parciales l_p , l_m , l_n , l_y , de las expresiones contenidas en las páginas 50 á 53, deben ser sustituidos por la longitud ó desarrollo total, l , de la fibra neutra.

La derivada del trabajo parcial, $(\mathfrak{F})_0^{lp}$, sólo mide un recorrido cuando se toma (pág. 29) respecto á la fuerza de enlace ó reacción total $R_{2,1}$, que sobre el trozo terminado en p ejerce el trozo restante. Pero, en realidad, no es en ese caso $(\mathfrak{F})_0^{lp}$ un trabajo parcial, sino el *total en ese trozo*, el cual subsiste en equilibrio cuando se le aísla realmente del sólido, siempre que al mismo tiempo se le someta á la entonces *causa exterior* ó reacción total $R_{2,1}$, igual á la resultante de todas las reacciones moleculares que el resto del sólido desarrolla cuando está entero.

La derivada del trabajo total $(\mathfrak{F})_0^l$, respecto á $R_{2,1}$ ó $R_{1,2}$ que en el sólido entero son, en lugar de causas externas, *efectos internos*, es idénticamente nula. Y esa nulidad *per se* es la que demuestra el hermoso teorema de Castigliano.

En la segunda ecuación del pórtico (pág. 67), el coeficiente de V en (II', H) es

$$\left\{ \frac{p^2 v + r p v^2}{2} \right\}$$

En el ejemplo séptimo falta, por olvido, un factor 2. La flecha estática q_e , producida por 1.000 kilogramos (pág. 78), es 0,000.6, doble de la estampada, porque, por la simetría, el trabajo elástico total es el doble del allí tenido en cuenta. La altura de caída α , es 0,118, también doble, así como la energía transformada en trabajo elástico 30 kgm., y como la flecha dinámica 0,022, que guarda la misma relación, casi igual á 4, con la flecha 0,006 debida á los 10.000 kilogramos estáticos. Las magnitudes de equivalencia ρ son, en cambio, dos veces menores que las estampadas, y así, la última, para $Q'' = 100$ kilogramos, es 11,06, casi igual á la resultante de los experimentos de la Comisión francesa.



X

Conclusión.

La moda, que hasta la ingeniería llega, consiste hoy en abominar de la teoría. Un estudio donde á cada paso saltan integrales y derivadas, donde se tropieza con ecuaciones de tercero y cuarto grado, amén de alguna transcendente..... no sirve, según los elegantes de nuestra profesión, más que para anquilosar el cerebro de quien lastimosamente pierda el tiempo en leer tales engendros de un teorizante!

Mucha práctica y poca teoría es el grito de moda. Mucha práctica y mucha teoría armónicamente concordadas, debiera ser y lo es para nosotros. La teoría es para el Ingeniero tan necesaria como el oxígeno para la vida. Hay, sin embargo, dentro de la escala biológica, seres anaerobios que viven sin ese elemento, como hay quien fiado exclusivamente en la rutina, armado de punta en blanco con fusil y manual, construye á diestro y siniestro, copiando obras preexistentes, ó haciendo otras por fórmulas-recetas *secundum artem*.

El extremo opuesto, el oxígeno puro, como la teoría sola, produce momentáneamente una vitalidad exagerada que pronto concluye en la muerte. Quien se entrega exclusivamente á la teoría, sin concordarla armoniosamente con la práctica, no debe tampoco llamarse Ingeniero, dista de serlo casi tanto como el rutinario.

El Ingeniero, como el sér aerobio normalmente organizado, tanto necesita del oxígeno como del nitrógeno y demás gases en



apariencia inertes, de uno y otros, de teoría y experiencia, íntimamente mezclados y siempre *en justa y constante ponderación*. El progreso de la experiencia debe llevar consigo el adelanto de la teoría; el perfeccionamiento de ésta debe producir forzosamente la mejora de la práctica. Y ambas aunadas y siempre armónicamente reunidas, sin predominio de una ni de otra, constituyen la verdadera *Ingeniería*.

Fieles á nuestro criterio de la necesidad de esa justa ponderación y en nuestro deseo de cooperar á ella y al progreso de nuestro Cuerpo, hemos hecho el presente estudio para vulgarizar una teoría utilísima, contrastada de sobra por la práctica, y cuya asombrosa fecundidad bien patente han hecho los ejemplos. Muchos de nuestros compañeros, nada rutinarios, Ingenieros de verdad, no han tenido ocasión de conocer los teoremas del trabajo elástico, casual ó intencionadamente ignorados en los libros más en uso en España. Hemos querido compilar, de un modo racional y sucinto, *lo necesario y suficiente* para que los compañeros que quieran dedicar unas cuantas horas al estudio de la poderosísima arma que es el trabajo elástico, puedan manejarla con seguridad y utilizarla inmediatamente en la práctica.

Lo necesario y suficiente....., el eterno *desideratum* del Ingeniero, ha sido nuestro ideal. Hemos huído tanto de la aridez y sequedad de exposición de los autores alemanes, en los que hay que adivinar buena parte entre líneas, como de la excesiva prolijidad, á veces un tanto confusa, con que Castigliano desarrolló sus principios. Hemos tratado de mantener la ilación más rigurosa posible y, sobre todo, de proceder siempre de lo general á lo particular. Y hemos multiplicado los ejemplos, buscando algunos raros y difíciles, después de otros sencillísimos, para familiarizar al lector con la *esgrima* del trabajo elástico.

Quienes hayan tenido paciencia y afición para *estudiar* esa esgrima, sencilla por demás, pronto habrán recogido el fruto y experimentado el hermoso y universal principio del mínimo trabajo.

Huelga decir que demostrados con toda generalidad los teoremas, los métodos son aplicables lo mismo á los sistemas constructivos de tres dimensiones que á los planos. Por sencillez y porque la inmensa mayoría de los casos prácticos corresponden á dos dimensiones nos hemos circunscrito á éstos en los ejemplos.



Curioso es observar que mientras algunos alemanes, y sobre todo el más significado, Müller Breslau, reconocen y admiran el colosal mérito de Castigliano (*), otros muchos, y con ellos los yanquis, apenas paran mientes en él y lo posponen á Mohr, reproduciendo en cierto modo el caso de Colón y Américo Vesputio.

En el fondo, como hemos visto, son una misma cosa la derivada parcial del trabajo elástico y el trabajo virtual unitario: ambas expresiones miden lo mismo, el recorrido. Si Castigliano se hubiera limitado á su primer teorema, sólo le quedaría la ventaja de la anterioridad (1873), sobre Mohr (1874).

Pero Castigliano hizo mucho más: edificó, puede decirse, una nueva Mecánica (**) con su segundo teorema, el del mínimo trabajo elástico, presentado por muchos, pero por nadie hasta entonces demostrado.

¡Hubiera sido francés y su nombre gozaría de fama universal! ¡Fué italiano y casi nadie lo conoce, sobre todo en España!

¡Que este humilde trabajo de un Ingeniero español, enamorado de su profesión y ferviente admirador de todos los grandes Ingenieros, sirva para que los españoles aprovechen el fruto de la obra del gran italiano y enaltezcan su glorioso nombre!

Enorme es el desnivel que de Müller-Breslau nos separa, salvo en una cosa, en la admiración que, como él, manifestamos dedicando, cada uno en la medida de sus fuerzas, él su magistral obra, nosotros nuestra modesta compilación, *á la memoria de ALBERTO CASTIGLIANO!*

(*) A cuya memoria está dedicada la obra citada *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*.

(**) Publicada en francés (Turín, 1879) por él mismo: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Demostró sus teoremas en 1873, en su reválida para obtener el título de Ingeniero.



Dat 60 E 0075

PUE



FUNDACIÓN
JUANELO
TURRIANO

